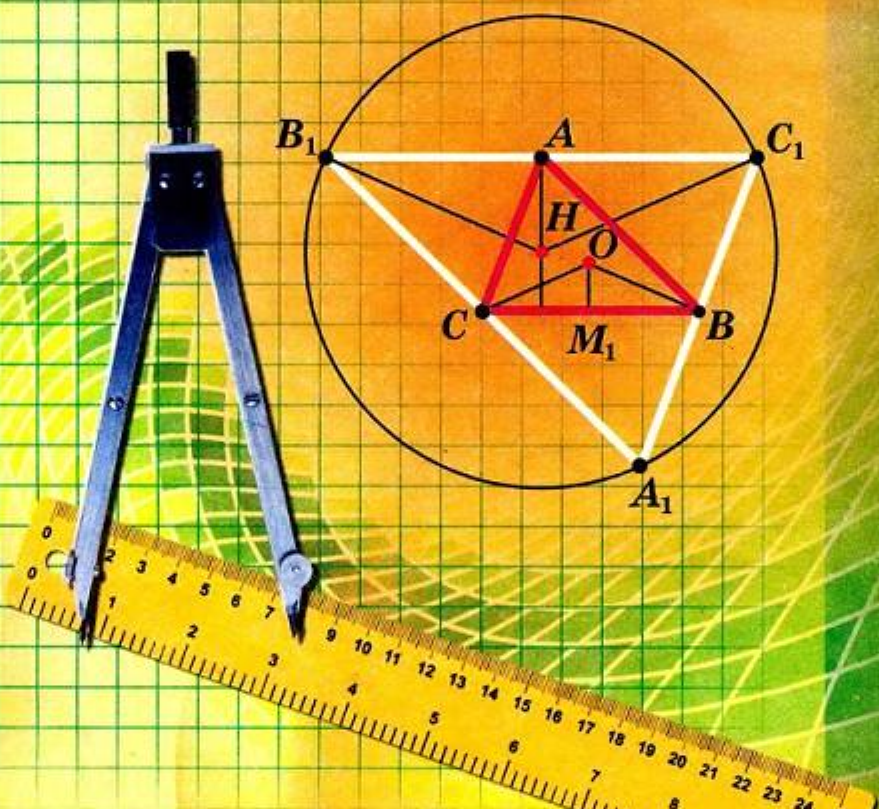
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

8

ГЕОМЕТРИЯ



ГІМНАЗІЯ

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1 я721
М52

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(приказ МОН Украины от 10.05.2016 № 491)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Эксперты, которые проводили экспертизу данного учебника во время проведения конкурсного отбора проектов учебников для учащихся 8 класса общеобразовательных учебных заведений и сделали заключение о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:

Л. В. Изюмченко, доцент кафедры математики Кировоградского государственного педагогического университета имени Владимира Винниченко, кандидат физико-математических наук

С. Г. Ботнарюк, учитель Хмельницкого лицея № 17 Хмельницкой области, учитель-методист

А. М. Рыбинская, учитель Вознесенской общеобразовательной школы I–III ступеней № 7 Николаевской области, учитель-методист

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрия : учеб. для 8 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обуч. на рус. яз. : пер. с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2016. — 224 с. : ил.
ISBN 978-966-474-282-2.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1 я721

ISBN 978-966-474-282-2
ISBN 978-966-474-275-4 (укр.)

ОТ АВТОРОВ

ДОРОГИЕ ВОСЬМИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хочется верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на четыре параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Изучая его, особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым мы советуем только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно отмеченные «звёздочкой» (*)). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме, расположенные в конце каждого параграфа.

Каждый пункт завершается рубрикой «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Эти задачи полезны, как витамины: они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Уважаемые коллеги!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Обращаем внимание на то, что учебник содержит задачи на построение. Они не обязательны для рассмотрения. Этот материал целесообразно использовать лишь в тех случаях, когда учащиеся уже ознакомлены с соответствующим разделом курса геометрии 7 класса.

Зеленым цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые на усмотрение учителя (с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса) можно решать устно.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Превратим вместе школьный курс геометрии в понятный и привлекательный предмет!

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;

ключевые задачи, результат которых может быть использован при решении других задач;

⊙ доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;

доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;

доказательство теоремы, не обязательное для изучения;

▲ окончание доказательства теоремы;

● окончание решения задачи;


рубрика «Когда сделаны уроки».

§1 ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В этом параграфе рассматривается знакомая вам геометрическая фигура **четырехугольник**. Вы ознакомитесь с отдельными видами четырехугольника: параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом, трапецией, изу́чите свойства этих фигур и узнаете о признаках, по которым среди четырехугольников можно распознать эти фигуры.

Вы изу́чите свойства отрезка, соединяющего середины сторон треугольника, и убедитесь в том, что эти свойства могут служить ключом к решению целого ряда задач.

Как измерить дугу окружности? Около какого четырехугольника можно описать окружность? В какой четырехугольник можно вписать окружность? Изучив материал этого параграфа, вы получите ответы и на эти вопросы.

1. Четырехугольник и его элементы

На рисунке 1 отрезки AB и BC имеют только одну общую точку B, которая является концом каждого из них. Такие отрезки называют **соседними**. На рисунке 2 каждые два отрезка являются соседними.

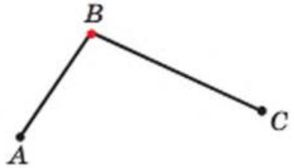


Рис. 1

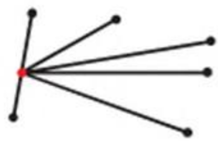


Рис. 2

Отрезки AB и CD на рисунке 3 не являются соседними.

а *б*

Рис. 3

Рассмотрим фигуру, состоящую из четырех точек A, B, C, D и четырех отрезков AB, BC, CD, DA таких, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек (рис. 4, *а*).

а *б*

Рис. 4

Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 4, *б* зеленым цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC, CD и DA называют **четырехугольником.** Точки A, B, C, D называют **вершинами** четырехугольника, а отрезки AB, BC, CD, DA — **сторонами** четырехугольника.

На рисунке 5 изображены фигуры, состоящие из четырех отрезков AB, BC, CD, DA и части плоскости, которую они ограничивают. Однако эти фигуры не являются четырехугольниками. Поясните почему.

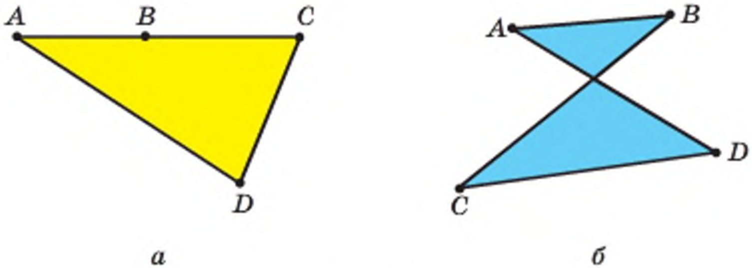


Рис. 5

Стороны четырехугольника, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** четырехугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** многоугольника. Стороны, не являющиеся соседними, называют **противолежащими сторонами** четырехугольника. Несоседние вершины называют **противолежащими вершинами** четырехугольника.

На рисунке 6 изображен четырехугольник, в котором, например, стороны MQ и MN являются соседними, а стороны NP и MQ — противолежащими. Вершины Q и P — соседние, а вершины M и P — противолежащие.

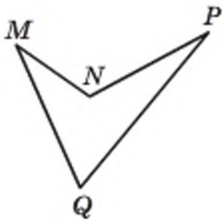
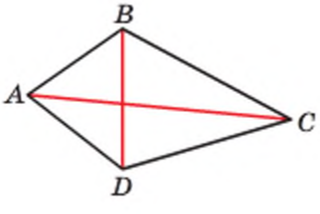


Рис. 6

Четырехугольник называют и обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 4, *б* изображен четырехугольник $ABCD$, а на рисунке 6 — четырехугольник $MNPQ$. В обозначении четырехугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам четырехугольника. Например, четырехугольник, изображенный на рисунке 6, можно обозначить еще и так: $PQMN$, или $MQPN$, или $NPQM$ и т. д.

Сумму длин всех сторон четырехугольника называют **периметром** четырехугольника.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины четырехугольника, называют **диагональю**. На рисунке 7 отрезки AC и BD — диагонали четырехугольника $ABCD$.



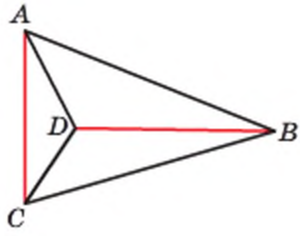


Рис. 7

Углы ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 8) называют **углами** четырехугольника $ABCD$. В этом четырехугольнике каждый из них меньше развернутого угла. Такой четырехугольник называют **выпуклым**. Однако существуют четырехугольники, в которых не все углы меньше развернутого. Например, на рисунке 9 угол B четырехугольника $ABCD$ больше $180°$. Такой четырехугольник называют **невыпуклым**[1].

Углы ABC и ADC называют **противолежащими углами** четырехугольника $ABCD$ (рис. 8, 9). Также противолежащими являются углы BAD и BCD.

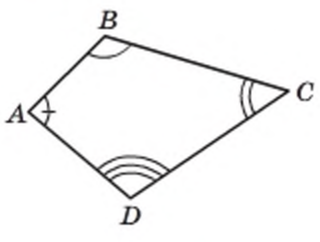


Рис. 8

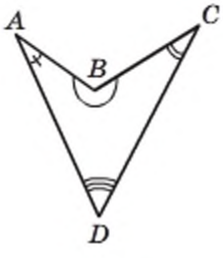


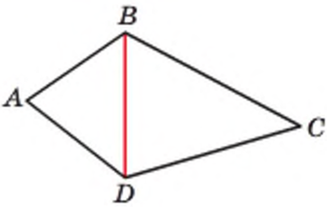
Рис. 9

Теорема 1.1. ***Сумма углов четырехугольника равна*** $360°$.

Доказательство. Проведем в четырехугольнике диагональ, разбивающую его на два треугольника. Например, на рисунке 10

---

[1] Более подробно с понятием «выпуклость» вы ознакомитесь в п. 19.



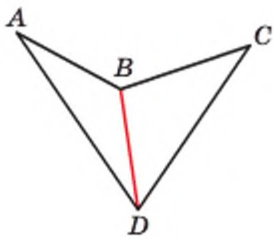


Рис. 10

это диагональ BD. Тогда сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна сумме углов треугольников ABD и CBD. Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то сумма углов четырехугольника равна 360°. ▲

Следствие. ***В четырехугольнике только один из углов может быть больше развернутого.***

Докажите это свойство самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что длина любой стороны четырехугольника меньше суммы длин трех остальных его сторон.

Решение. Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$ (рис. 11). Покажем, например, что $AB < AD + DC + CB$.

Проведем диагональ AC. Применяя неравенство треугольника для сторон AB и AC соответственно треугольников ABC и ADC, получаем неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Отсюда $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Следовательно, $AB < AD + DC + CB$. ●

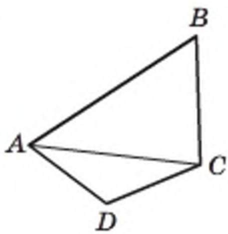


Рис. 11

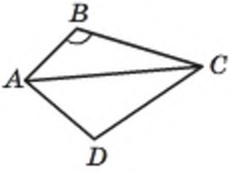


Рис. 12

Задача 2. Постройте четырехугольник по двум соседним сторонам и четырем углам, каждый из которых меньше развернутого.[1]

Решение. На рисунке 12 изображен четырехугольник $ABCD$, в котором известны длины сторон AB и BC, а также все его углы.

[1] В учебнике задачи на построение не обязательны для рассмотрения.

В треугольнике ABC известны две стороны AB и BC и угол B между ними. Следовательно, этот треугольник можно построить. Теперь можем от лучей AB и CB отложить углы, равные углам четырехугольника при вершинах A и C.

Проведенный анализ показывает, как строить искомый четырехугольник.

Строим треугольник по двум данным сторонам четырехугольника и углу между ними. На рисунке 12 это треугольник ABC. Далее от лучей AB и CB откладываем два известных угла четырехугольника. Два построенных луча пересекаются в точке D. Четырехугольник $ABCD$ — искомый.

1. Объясните, какие отрезки называют соседними.
2. Объясните, какую фигуру называют четырехугольником.
3. Какие стороны четырехугольника называют соседними? противолежащими?
4. Какие вершины четырехугольника называют соседними? противолежащими?
5. Как обозначают четырехугольник?
6. Что называют периметром четырехугольника?
7. Что называют диагональю четырехугольника?
8. Какой четырехугольник называют выпуклым?
9. Сформулируйте теорему о сумме углов четырехугольника.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1.° Начертите четырехугольник, в котором:
1) три угла тупые;
2) два угла при соседних вершинах прямые, а два других не являются прямыми;
3) одна диагональ точкой пересечения диагоналей делится пополам, а другая не делится пополам;
4) диагонали перпендикулярны.

2.° Начертите произвольный четырехугольник, обозначьте его вершины буквами M, K, E, F. Укажите пары его соседних сторон, противолежащих сторон, противолежащих вершин. Запишите три каких-нибудь обозначения этого четырехугольника.

3.° Начертите четырехугольник, в котором:
1) три угла острые;
2) два противолежащих угла прямые, а два других не являются прямыми;
3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

УПРАЖНЕНИЯ

4.° Среди фигур, изображенных на рисунке 13, укажите четырехугольники.

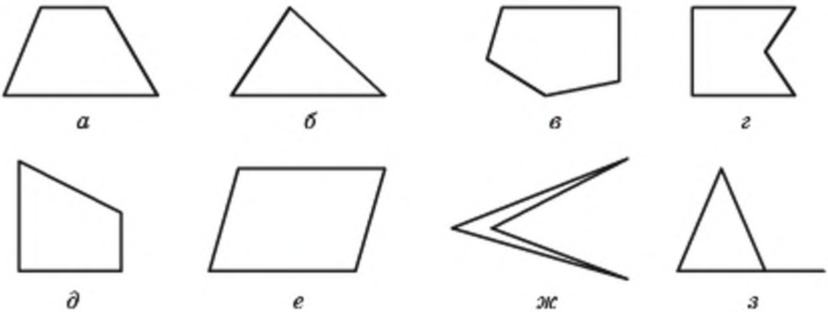


Рис. 13

5.° Приведите четыре каких-нибудь обозначения четырехугольника, изображенного на рисунке 14. Укажите:
1) вершины четырехугольника;
2) его стороны;
3) пары соседних вершин;
4) пары противолежащих вершин;
5) пары соседних сторон;
6) пари противолежащих сторон;
7) диагонали четырехугольника.

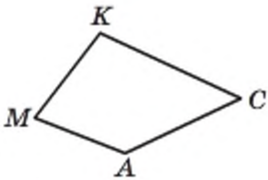


Рис. 14

6.° Среди четырехугольников, изображенных на рисунке 15, укажите выпуклые.

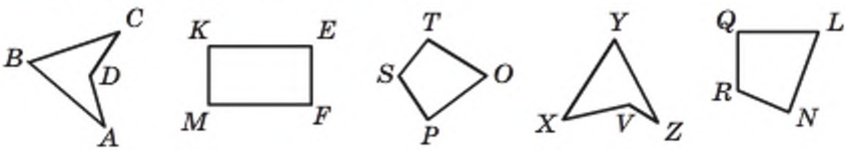


Рис. 15

7.° Чему равен четвертый угол четырехугольника, если три его угла равны $78°$, $89°$ и $93°$?

8.° Найдите углы четырехугольника, если они равны между собой.

9.° В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B = 150°$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Найдите неизвестные углы четырехугольника.

10.° Один из углов четырехугольника в 2 раза меньше второго угла, на $20°$ меньше третьего и на $40°$ больше четвертого. Найдите углы четырехугольника.

11.° Найдите углы четырехугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 10 и 21. Является ли этот четырехугольник выпуклым?

12.° Найдите углы четырехугольника, если три его угла пропорциональны числам 4, 5 и 7, а четвертый угол равен их полусумме. Является ли этот четырехугольник выпуклым?

13.° Может ли четырехугольник иметь:
1) три прямых угла и один острый;
2) три прямых угла и один тупой;
3) четыре прямых угла;
4) четыре острых угла;
5) два прямых и два тупых угла;
6) два прямых угла, один острый и один тупой?

В случае утвердительного ответа нарисуйте такой четырехугольник.

14.° Периметр четырехугольника равен 63 см. Найдите его стороны, если вторая сторона составляет $\frac{2}{3}$ первой, третья — 50 % второй, а четвертая — 150 % первой.

15.° Найдите стороны четырехугольника, если одна из них на 2 см больше второй, на 6 см меньше третьей, в 3 раза меньше четвертой, а периметр равен 64 см.

16.° В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, а диагональ BD образует с этими сторонами равные углы. Докажите, что стороны CD и AD также равны.

17.° Диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, одна из его сторон равна 6 см. Чему равна противолежащая ей сторона четырехугольника?

18.° В четырехугольнике $MNKP$ известно, что $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Найдите угол K.

19.° В четырехугольнике диагональ AC образует со сторонами AB и AD равные углы и со сторонами CB и CD также равные углы, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

20.• В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Биссектрисы AK и BM треугольника пересекаются в точке O. Найдите углы четырехугольника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21.• В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Высоты AE и BF треугольника пересекаются в точке H. Найдите углы четырехугольника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22.• Найдите диагональ четырехугольника, если его периметр равен 80 см, а периметры треугольников, на которые эта диагональ разбивает данный четырехугольник, равны 36 см и 64 см.

23.• Могут ли стороны четырехугольника быть равными:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24.•• В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C = 90°$. Докажите, что биссектрисы двух других углов четырехугольника либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

25.•• Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов выпуклого четырехугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла четырехугольника равны.

26.•• Постройте четырехугольник по его сторонам и одному из углов.

27.•• Постройте четырехугольник по трем сторонам и двум диагоналям.

28.•• Постройте четырехугольник по его сторонам и одной из диагоналей.

29.* Постройте четырехугольник $ABCD$ по углам A и B, сторонам AB и BC и сумме сторон AD и CD.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

30. Прямая c пересекает каждую из прямых a и b (рис. 16). Укажите пары накрест лежащих и пары односторонних углов, образовавшихся при этом. Каково взаимное расположение прямых a и b, если: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20°$, $\angle 3 = 170°$?

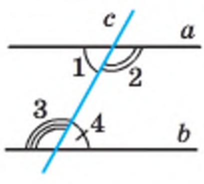


Рис. 16

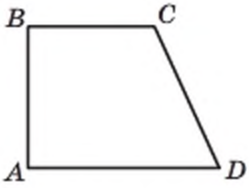


Рис. 17

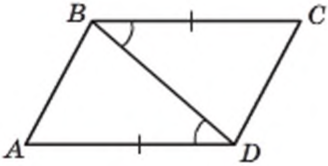


Рис. 18

31. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 17) $\angle C = 110°$, $\angle D = 70°$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

32. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle C = 100°$. Параллельны ли прямые: 1) BC и AD; 2) AB и CD?

33. На рисунке 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите, что $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

34. Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Прямая DK параллельна стороне AB и пересекает сторону BC в точке D, $\angle BDK = 116°$. Найдите угол BKD.

Повторите содержание пунктов 12, 13, 14 на с. 202, 203.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

35. Белая плоскость произвольно забрызгана черной краской. Докажите, что на плоскости найдется отрезок длиной 1 м, концы которого закрашены одним цветом.

ДЕРЗАЙТЕ!

Задача 29 отмечена «звездочкой» (*). Это означает, что она относится к задачам повышенной сложности. Хотя таких задач не будет на самостоятельных и контрольных работах, их в учебнике немало. У вас может возникнуть вопрос: «Зачем же тратить время и силы на трудные задачи, если они не обязательны для решения, а высокую оценку можно заработать гораздо меньшими стараниями?» По нашему мнению, лучший ответ на этот вопрос можно найти в книге «Математика и романтика» известного украинского геометра и педагога Николая Ивановича Кованцова. Он писал: «Дорогие друзья! Беритесь за решение трудных математических задач! И тех, которые только что поставлены, и тех, которые уже многие десятилетия или столетия не поддаются решению. Вас будут ожидать страдания, вы будете разочарованы, когда вам будет казаться, что вы напрасно потратили годы на поиски ускользающего от вас призрака. Все может быть. Но вы будете сторицей вознаграждены, когда в один прекрасный день окажетесь перед той заветной целью, к которой так долго и так трудно шли. Не будьте безучастными и равнодушными, в противном случае это будет духовная смерть».

Н. И. Кованцов почти 30 лет возглавлял кафедру геометрии Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Его перу принадлежат более 200 научных и научно-популярных работ.

Николай Иванович воспитал десятки ученых, которые сегодня достойно представляют украинскую науку во всем мире.

Н. И. Кованцов
(1924–1988)

2. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Определение. Параллелограммом называют четырехугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

На рисунке 19 изображен параллелограмм $ABCD$. По определению параллелограмма имеем: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

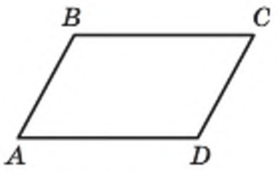


Рис. 19

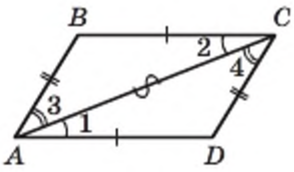


Рис. 20

Теорема 2.1. ***Противолежащие стороны параллелограмма равны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 19 изображен параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

Проведем диагональ AC. Докажем, что треугольники ABC и CDA равны (рис. 20).

В этих треугольниках сторона AC — общая, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ и $BC = AD$. ▲

Теорема 2.2. ***Противолежащие углы параллелограмма равны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 19 изображен параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 20). Отсюда $\angle B = \angle D$. Из равенства углов 1 и 2 и равенства углов 3 и 4 следует, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Теорема 2.3. ***Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 21 изображен параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

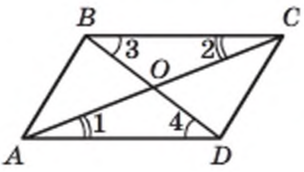


Рис. 21

Рассмотрим треугольники AOD и COB. Имеем: $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно. Из теоремы 2.1 получаем: $AD = BC$. Следовательно, треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Определение. **Высотой параллелограмма** **называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.**

На рисунке 22 каждый из отрезков AF, QE, BM, PN, CK является высотой параллелограмма $ABCD$.

Из курса геометрии 7 класса вы знаете, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой. Поэтому $AF = QE$ и $BM = PN = CK$.

Говорят, что **высоты** BM, CK, PN **проведены к сторонам** BC и AD, а высоты AF, QE — к сторонам AB и CD.

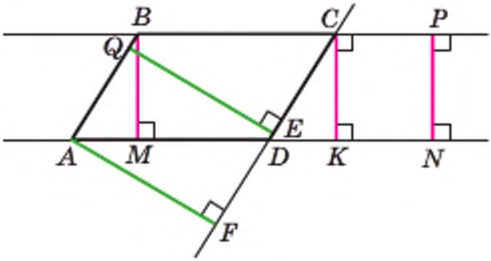


Рис. 22

Задача 1. Докажите, что прямые, содержащие высо́ты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Через каждую вершину данного треугольника ABC проведем прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

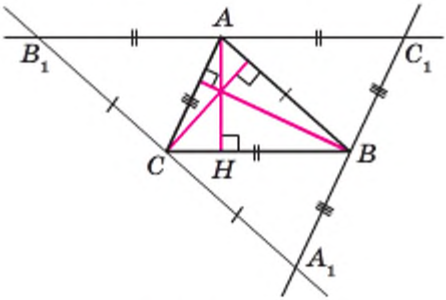


Рис. 23

Из построения следует, что четырехугольники AC_1BC и $ABCB_1$ — параллелограммы. Отсюда $AC_1 = BC = AB_1$. Следовательно, точка A является серединой отрезка B_1C_1.

Поскольку прямые B_1C_1 и BC параллельны, то высота AH треугольника ABC перпендикулярна отрезку B_1C_1. Таким образом, прямая AH — серединный перпендикуляр стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично можно доказать, что прямые, содержащие две другие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами сторон C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, то утверждение теоремы доказано.

Задача 2. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Пусть биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ (рис. 24) пересекает сторону AD в точке M. По условию $AM : MD = 2 : 1$.

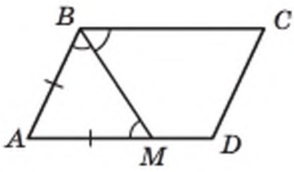


Рис. 24

Углы ABM и CBM равны по условию.

Углы CBM и AMB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM.

Тогда $\angle ABM = \angle AMB$. Следовательно, треугольник BAM равнобедренный, отсюда $AB = AM$.

Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Поскольку противолежащие стороны параллелограмма равны, то его периметр равен $2\,(AB + AD)$. Учитывая, что по условию периметр параллелограмма равен 60 см, получаем:

$$2\,(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Следовательно, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Ответ: 12 см, 18 см.

1. Какой четырехугольник называют параллелограммом?
2. Каким свойством обладают противолежащие стороны параллелограмма?
3. Каким свойством обладают противолежащие углы параллелограмма?
4. Каким свойством обладают диагонали параллелограмма?
5. Что называют высотой параллелограмма?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

36.° На рисунке 25 изображен параллелограмм $ABCD$. Сделайте такой рисунок в тетради. Проведите из точек B и M высоты параллелограмма к стороне AD, а из точки K — высоту к стороне AB.

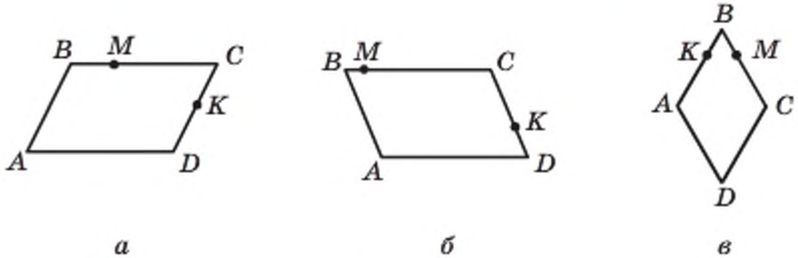


Рис. 25

УПРАЖНЕНИЯ

37.° Две параллельные прямые пересекают три другие параллельные прямые. Сколько при этом образовалось параллелограммов?

38.° На рисунке 26 изображены параллелограммы. Определите, не выполняя измерений, на каких рисунках величины углов или длины отрезков обозначены неправильно (длины отрезков даны в сантиметрах).

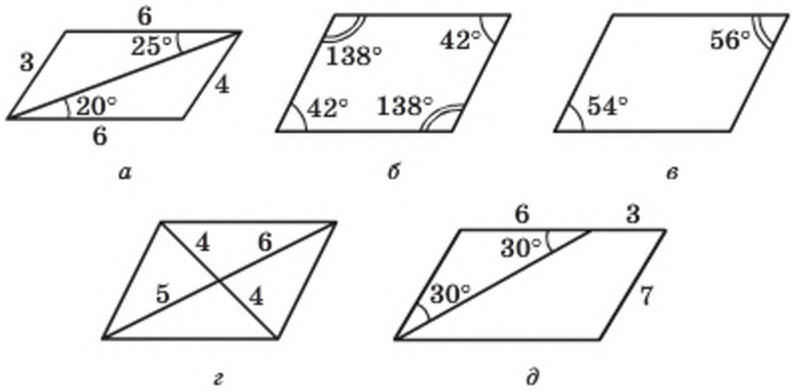


Рис. 26

39.° Хватит ли 40 см проволоки, чтобы изготовить из нее параллелограмм со сторонами: 1) 14 см и 8 см; 2) 16 см и 4 см; 3) 12 см и 6 см?

40.° Периметр параллелограмма равен 112 см. Найдите его стороны, если: 1) одна из них на 12 см меньше другой; 2) две его стороны относятся как 5 : 9.

41.° Найдите стороны параллелограмма, если одна из них в 5 раз больше другой, а периметр параллелограмма равен 96 см.

42.° В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O — точка пересечения его диагоналей. Найдите периметр треугольника COD.

43.° Докажите, что сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°.

44.° Найдите углы параллелограмма, если:
1) один из них равен 70°;
1) сумма двух его углов равна 100°;
2) разность двух его углов равна 20°;
3) два его угла относятся как 3 : 7.

45.° Найдите углы параллелограмма, если один из них:
1) в 2 раза больше другого;
2) на 24° меньше другого.

46.° В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 35°$. Через произвольную точку, принадлежащую стороне BC, проведены две прямые, параллельные сторонам AB и AC треугольника. Определите вид образовавшегося четырехугольника и найдите все его углы.

47.° Найдите углы параллелограмма $ABCD$ (рис. 27), если $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

48.° В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AB угол, равный 32°, $\angle BCD = 56°$. Найдите углы CAD и D.

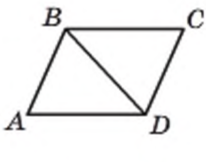


Рис. 27

49.° Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Определите величину угла M треугольника ABM.

50.° Стороны параллелограмма равны 6 см и 10 см. Может ли одна из его диагоналей быть равной 16 см?

51.• Высота BK параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки AK и KD такие, что $AK = 4$ см, $KD = 6$ см. Найдите углы и периметр параллелограмма, если $\angle ABK = 30°$.

52.• Один из углов параллелограмма равен 45°. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 3 см и делит сторону параллелограмма пополам. Найдите эту сторону параллелограмма и углы, которые образует диагональ, соединяющая вершины тупых углов, со сторонами параллелограмма.

53.° В параллелограмме $ABCD$ известно, что $\angle C = 30°$, высота BH, проведенная к стороне CD, равна 7 см, а периметр параллелограмма равен 46 см. Найдите стороны параллелограмма.

54.° Даны параллелограмм $ABCD$ и треугольник MKN. Могут ли одновременно выполняться равенства $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55.° Докажите, что вершины B и D параллелограмма $ABCD$ равноудалены от прямой AC.

56.° Докажите, что любой отрезок, который проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма и концы которого принадлежат противолежащим сторонам параллелограмма, делится этой точкой пополам.

57.° Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 24 см, $\angle ABC = 160°$, диагональ AC образует со стороной AD угол $10°$. Найдите стороны параллелограмма.

58.° Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует со стороной AB угол $65°$, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ см. Найдите периметр параллелограмма.

59.° Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $BD \perp AB$ и $BD = AB$.

60.° Диагональ параллелограмма образует с его сторонами углы $30°$ и $90°$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см.

61.° Вне параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная его диагонали BD. Эта прямая пересекает прямые AB, BC, CD и AD в точках E, M, F и K соответственно. Докажите, что $MK = EF$.

62.° Параллельно диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BC в точках M и N, а прямые AD и CD в точках P и K соответственно. Докажите, что $PM = NK$.

63.° Один из углов, образовавшихся при пересечении биссектрисы угла параллелограмма с его стороной, равен $24°$. Найдите углы параллелограмма.

64.° Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите периметр данного параллелограмма, если $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

65.° Биссектриса острого угла параллелограмма делит его сторону в отношении $3 : 5$, считая от вершины тупого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 66 см.

66.° Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону CD в точке K так, что отрезок CK в 5 раз больше отрезка KD. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 88 см.

67.° В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках E и F соответственно. Найдите отрезок EF.

68.° Угол между высотой BH параллелограмма $ABCD$ и биссектрисой BM угла ABC равен 24°. Найдите углы параллелограмма.

69.° Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.

70.° Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

71.° Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен 30°. Найдите периметр параллелограмма, если его высоты равны 4 см и 6 см.

72.° Высоты параллелограмма, проведенные из вершины острого угла, образуют угол 150°, стороны параллелограмма равны 10 см и 18 см. Найдите высоты параллелограмма.

73.° Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр образовавшегося четырехугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

74.° Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, параллельная противолежащей стороне. Сумма периметров всех образовавшихся параллелограммов равна 100 см. Найдите периметр треугольника ABC.

75.° Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по двум диагоналям и стороне;
3) по стороне, диагонали и углу между ними.

76.° Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и диагонали;
2) по двум диагоналям и углу между ними.

77.$^{\bullet\bullet}$ Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, вершинами которого являются данные точки. Сколько решений имеет задача?

78.$^{\bullet\bullet}$ Точка пересечения биссектрис двух соседних углов параллелограмма принадлежит его стороне. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

79.$^{\bullet\bullet}$ На стороне BC параллелограмма $ABCD$ существует такая точка M, что $BM = MD = CD$. Найдите углы параллелограмма, если $AD = BD$.

80.$^{\bullet\bullet}$ Постройте параллелограмм:

1) по стороне, проведенной к ней высоте и диагонали;
2) по двум диагоналям и высоте;
3) по острому углу и двум высотам, проведенным к двум соседним сторонам.

81.$^{\bullet\bullet}$ Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и высоте;
2) по диагонали и двум высотам, проведенным к двум соседним сторонам.

82.* Из вершины B параллелограмма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на диагональ AC. Через точку A проведена прямая m, перпендикулярная прямой AD, а через точку C — прямая n, перпендикулярная прямой CD. Докажите, что точка пересечения прямых m и n принадлежит прямой BE.

83.* Постройте параллелограмм по стороне, сумме диагоналей и углу между диагоналями.

84.* На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABM и BCK. Докажите, что треугольник MKD равносторонний.

85.* Через точку, принадлежащую углу, проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри угла, данной точкой делился пополам.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

86. Длина отрезка AB равна 24 см. Точка C принадлежит прямой AB, причем $BC = 5AC$. На отрезке AB отметили точку D так, что $AB = 4BD$. Найдите отрезок CD.

87. Сколько существует неравных между собой:

1) прямоугольных треугольников со стороной 5 см и углом 45°;
2) равнобедренных треугольников со стороной 6 см и углом 30°;
3) прямоугольных треугольников со стороной 7 см и углом 60°?

88. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ являются диаметрами окружности. Докажите, что $AB \parallel CD$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

89. Можно ли квадрат размером 10 × 10 клеток разрезать на 25 фигур, которые состоят из четырех клеток и имеют такой вид, как показано на рисунке 28?

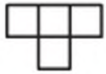


Рис. 28

3. Признаки параллелограмма

Определение параллелограмма позволяет среди четырехугольников распознавать параллелограммы. Этой же цели служат следующие три теоремы, которые называют признаками параллелограмма.

Теорема 3.1 (обратная теореме 2.1). ***Если в четырехугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 29 изображен четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

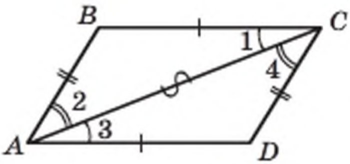


Рис. 29

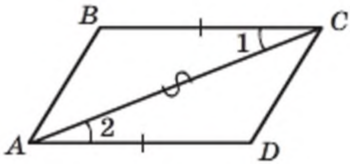


Рис. 30

Проведем диагональ AC. Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Углы 1 и 3 являются накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, $BC \parallel AD$. Аналогично из равенства $\angle 2 = \angle 4$ следует, что $AB \parallel CD$.

Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ каждые две противолежащие стороны параллельны, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. ▲

Теорема 3.2. ***Если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 30 изображен четырехугольник $ABCD$, в котором $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Проведем диагональ AC. В треугольниках ABC и CDA имеем: $BC = AD$ по условию, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, а сторона AC общая. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$. Значит, в четырехугольнике $ABCD$ каждые две противолежащие стороны равны. Поэтому по теореме 3.1 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. ▲

Теорема 3.3 (обратная теореме 2.3). ***Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 31 изображен четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

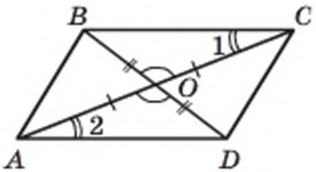


Рис. 31

Поскольку углы BOC и DOA равны как вертикальные, $AO = OC$ и $BO = OD$, то треугольники BOC и DOA равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Углы 1 и 2 являются накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, $BC \parallel AD$.

Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ две противолежащие стороны равны и параллельны. По теореме 3.2 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. ▲

Вы знаете, что треугольник можно однозначно задать его сторонами, то есть задача построения треугольника по трем сторонам имеет единственное решение. Иначе обстоит дело с параллелограммом. На рисунке 32 изображены параллелограммы $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, стороны которых равны, то есть $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ и $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Однако очевидно, что сами параллелограммы не равны.

Сказанное означает, что если четыре рейки скрепить так, чтобы образовался параллелограмм, то полученная конструкция не будет жесткой.

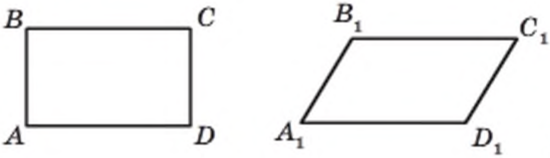


Рис. 32

Это свойство параллелограмма широко используют на практике. Благодаря его подвижности лампу можно устанавливать в удобное для работы положение, а раздвижную решетку — отодвигать на нужное расстояние в дверном проеме (рис. 33).

Рис. 33

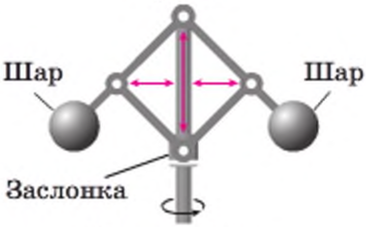


Рис. 34

На рисунке 34 изображена схема механизма, являющегося частью паровой машины. При увеличении скорости вращения оси шары отдаляются от нее под действием центробежной силы, тем самым поднимая заслонку, регулирующую количество пара. Механизм назван **параллелограммом Уатта** в честь изобретателя первой универсальной паровой машины.

Задача. Докажите, что если в четырехугольнике каждые два противолежащих угла равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

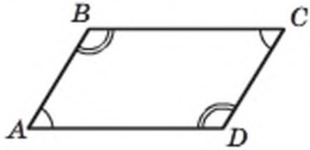


Рис. 35

Решение. На рисунке 35 изображен четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

По теореме о сумме углов четырехугольника (теорема 1.1) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Учитывая, что $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, получим: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Поскольку углы A и B — односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB, а их сумма равна $180°$, то $BC \parallel AD$.

Аналогично доказываем, что $AB \parallel CD$.

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

1. Какие признаки параллелограмма вы знаете? Сформулируйте их.
2. Среди свойств и признаков параллелограмма укажите взаимно обратные теоремы.
3. Какое свойство параллелограмма широко используют на практике?

УПРАЖНЕНИЯ

90.° Докажите, что если сумма углов, прилежащих к любой из соседних сторон четырехугольника, равна $180°$, то этот четырехугольник — параллелограмм.

91.° Четырехугольники $ABCD$ и $AMKD$ — параллелограммы (рис. 36). Докажите, что четырехугольник $BMKC$ — параллелограмм.

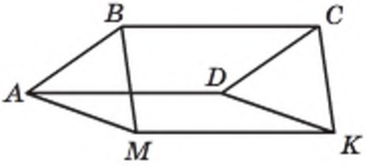


Рис. 36

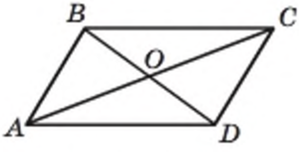


Рис. 37

92.° Отрезок AO — медиана треугольника ABD, отрезок BO — медиана треугольника ABC (рис. 37). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

93.° На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что четырехугольник $MBKD$ — параллелограмм.

94.° Две окружности имеют общий центр O (рис. 38). В одной из окружностей проведен диаметр AB, в другой — диаметр CD. Докажите, что четырехугольник $ACBD$ — параллелограмм.

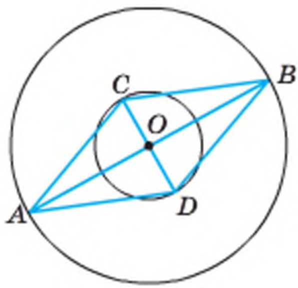


Рис. 38

95.° Точки E и F — соответственно середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AECF$ — параллелограмм.

96.° На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CK. Докажите, что четырехугольник $MBKD$ — параллелограмм.

97.° На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 39) отложены равные отрезки AM, BK, CE и DF. Докажите, что четырехугольник $MKEF$ — параллелограмм.

98.• В треугольнике ABC на продолжении медианы AM за точку M отложили отрезок MK, равный отрезку AM. Определите вид четырехугольника $ABKC$.

99.• В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

100.• Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла C — сторону AD в точке K. Докажите, что четырехугольник $AMCK$ — параллелограмм.

101.• На рисунке 40 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BCP = \angle DAE$. Докажите, что четырехугольник $APCE$ — параллелограмм.

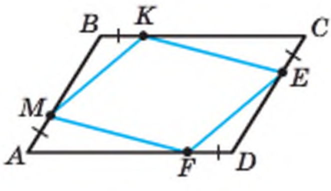


Рис. 39

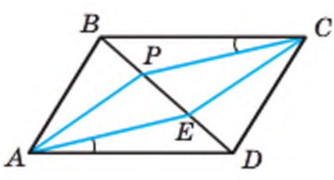


Рис. 40

102.• На рисунке 41 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BEC = \angle DFA$. Докажите, что четырехугольник $AECF$ — параллелограмм.

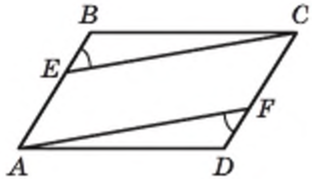


Рис. 41

103.• Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ провели перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. Докажите, что четырехугольник $BKDM$ — параллелограмм.

104.• Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают его диагональ BD в точках E и F соответственно. Докажите, что четырехугольник $AECF$ — параллелограмм.

105.•• Через середину O диагонали NP параллелограмма $MNKP$ проведена прямая, пересекающая стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Докажите, что четырехугольник $ANBP$ — параллелограмм.

106.•• Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $CDEF$ проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны CD и EF в точках A и B соответственно, а другая — стороны DE и CF в точках M и K соответственно. Докажите, что четырехугольник $AMBK$ — параллелограмм.

107.•• Точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются точки пересечения прямых AN, BK, CP и DM, — параллелограмм.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

108. Прямые, на которых лежат биссектрисы AK и BM треугольника ABC, пересекаются под углом 74°. Найдите угол C.

109. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 8 см. Найдите основание треугольника.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

110. Учитель предложил ученику вырезать из листа картона размером 8×8 клеток восемь квадратов размером 2×2 клетки при условии не портить оставшиеся клетки. Потом оказалось, что нужен еще один такой же квадрат. Всегда ли можно вырезать его из остатков листа?

НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО

Из курса геометрии 7 класса вы узнали, что большинство теорем состоят из двух частей: условия (то, что дано) и заключения (то, что требуется доказать).

Если утверждение, выражающее условие, обозначить буквой A, а утверждение, выражающее заключение, — буквой B, то формулировку теоремы можно изобразить следующей схемой:

если A, то B.

Например, теорему 2.3 можно сформулировать так:

	A		B
если	четырехугольник является параллелограммом,	**то**	диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам

Тогда теорему 3.3, обратную теореме 2.3, можно сформулировать так:

	B		A
если	диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам,	**то**	четырехугольник является параллелограммом

Часто в повседневной жизни в своих высказываниях мы пользуемся словами «необходимо», «достаточно». Приведем несколько примеров.

- Для того чтобы уметь решать задачи, *необходимо* знать теоремы.
- Если вы на математической олимпиаде правильно решили все предложенные задачи, то этого *достаточно* для того, чтобы занять первое место.

Употребление слов «необходимо» и «достаточно» тесно связано с теоремами.

Рассмотрим теорему:

	A		B
если	натуральное число кратно 10,	**то**	это число кратно 5

Условие A является достаточным для заключения B. Вместе с тем делимость числа нацело на 5 (утверждение B) необходима для делимости числа нацело на 10 (утверждение A).

Приведем еще один пример:

	A		***B***
если	два угла являются вертикальными,	**то**	эти углы равны

В этой теореме утверждение A является **достаточным условием** для утверждения B, то есть для того, чтобы два угла были равны, *достаточно*, чтобы они были вертикальными. В этой же теореме утверждение B является **необходимым условием** для утверждения A, то есть для того, чтобы два угла были вертикальными, *необходимо*, чтобы они были равны. Отметим, что утверждение B не является достаточным условием для утверждения A. Действительно, если два угла равны, то это совсем не означает, что они вертикальные.

Итак, в любой теореме вида **если A, то B** утверждение A является достаточным для утверждения B, а утверждение B — необходимым для утверждения A.

Если справедлива не только теорема

если A, то B,

но и обратная теорема

если B, то A,

то A является **необходимым и достаточным** условием для B, а B — необходимым и достаточным условием для A.

Например, теоремы 3.3 и 2.3 являются взаимно обратными. На языке «необходимо — достаточно» этот факт можно сформулировать так:

для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам.

Подчеркнем, что если в теореме есть слова «необходимо и достаточно», то она объединяет две теоремы: прямую и обратную (прямой теоремой может быть любая из двух теорем, тогда другая будет обратной). Следовательно, доказательство такой теоремы должно состоять из двух частей: доказательств прямой и обратной теорем. Теорему, объединяющую прямую и обратную теоремы, называют **критерием**.

Иногда вместо «необходимо и достаточно» говорят «тогда и только тогда». Например, взаимно обратные теоремы 2.1 и 3.1 можно объединить в следующий критерий:

четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждые две его противолежащие стороны равны.

Сформулируйте самостоятельно теорему 2.2 и ключевую задачу п. 3 в виде теоремы-критерия.

4. Прямоугольник

Параллелограмм — это четырехугольник, однако очевидно, что не каждый четырехугольник является параллелограммом. В этом случае говорят, что параллелограмм — это отдельный вид четырехугольника. Рисунок 42 иллюстрирует этот факт.

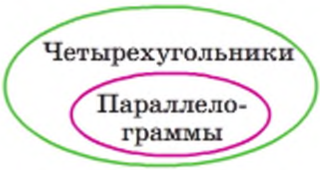


Рис. 42

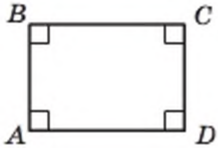


Рис. 43

Существуют также отдельные виды параллелограммов.

Определение. Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

На рисунке 43 изображен прямоугольник $ABCD$.

Из определения следует, что прямоугольник имеет все свойства параллелограмма. *В прямоугольнике:*

- *противолежащие стороны равны;*
- *диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Однако прямоугольник имеет свои особые свойства, которыми не обладает параллелограмм, отличный от прямоугольника. Так, из определения следует, что все углы прямоугольника равны. Еще одно свойство прямоугольника выражает следующая теорема.

Теорема 4.1. ***Диагонали прямоугольника равны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 44 изображен прямоугольник $ABCD$. Докажем, что его диагонали AC и BD равны.

В прямоугольных треугольниках ABD и DCA катеты AB и DC равны, а катет AD общий. Поэтому треугольники ABD и DCA равны по двум катетам. Отсюда $BD = AC$. ▲

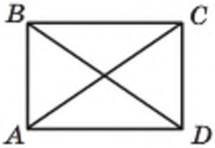


Рис. 44

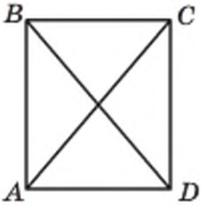


Рис. 45

Определение прямоугольника позволяет среди параллелограммов распознавать прямоугольники. Этой же цели служат следующие две теоремы, которые называют признаками прямоугольника.

Теорема 4.2. ***Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.***

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 4.3. ***Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 45 изображен параллелограмм $ABCD$, диагонали AC и BD которого равны. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

Рассмотрим треугольники ABD и DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD — общая сторона. Следовательно, эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle BAD = \angle CDA$. Эти углы являются односторонними при параллельных прямых AB и DC и секущей AD. Таким образом, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тогда $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Поэтому по теореме 4.2 параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. ▲

1. Какую фигуру называют прямоугольником?
2. Какими свойствами обладает прямоугольник?
3. Каким особым свойством обладают диагонали прямоугольника?
4. По каким признакам можно установить, что параллелограмм является прямоугольником?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

111.° Начертите прямоугольник. Пользуясь только линейкой, найдите точку, равноудаленную от его вершин.

УПРАЖНЕНИЯ

112.° Докажите, что четырехугольник, все углы которого прямые, является прямоугольником.

113.° Диагонали прямоугольника $ABCD$ (рис. 46) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и AOD равнобедренные.

114.° Диагонали прямоугольника $ABCD$ (рис. 46) пересекаются в точке O, $\angle ABD = 64°$. Найдите углы COD и AOD.

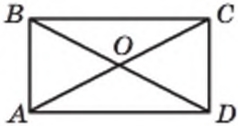


Рис. 46

115.° Диагонали прямоугольника $ABCD$ (рис. 46) пересекаются в точке O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ см. Найдите периметр треугольника AOB.

116.° Угол между диагоналями прямоугольника равен 60°, а меньшая сторона прямоугольника равна 8 см. Найдите диагональ прямоугольника.

117.• На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CK (точка M лежит между точками A и K). Докажите, что четырехугольник $BKDM$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника.

118.• На продолжении диагонали BD прямоугольника $ABCD$ за точку B отметили точку E, а на продолжении за точку D — точку F так, что $BE = DF$. Докажите, что четырехугольник $AECF$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника.

119.• Точка M — середина стороны BC прямоугольника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямоугольника равен 36 см. Найдите стороны прямоугольника.

120.• Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 30 см. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке M, принадлежащей стороне BC. Найдите стороны прямоугольника.

121.• Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 55 см. Прямоугольник $ABCD$ построен так, что две его вершины A и D принадлежат гипотенузе, а две другие — катетам данного треугольника. Найдите стороны прямоугольника, если $AB : BC = 3 : 5$.

122.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямоугольник $CMKN$ построен так, что точка M принадлежит катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гипотенузе AB. Найдите периметр прямоугольника $CMKN$.

123.° Докажите, что если диагонали параллелограмма образуют равные углы с одной из его сторон, то этот параллелограмм является прямоугольником.

124.° Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

125.° Постройте прямоугольник:

1) по двум сторонам;
2) по диагонали и углу между диагональю и стороной.

126.° Постройте прямоугольник:

1) по стороне и диагонали;
2) по диагонали и углу между диагоналями.

127.°° Серединный перпендикуляр диагонали AC прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Найдите углы, на которые диагональ прямоугольника делит его угол.

128.°° В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Найдите расстояние от точки C до диагонали BD.

129.°° Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, у которого соседние стороны не равны, пересекаясь, образуют прямоугольник.

130.°° Постройте прямоугольник по стороне и углу между диагоналями, противолежащему данной стороне.

131.* Постройте прямоугольник:

1) по диагонали и разности двух сторон;
2) по периметру и диагонали;
3) по периметру и углу между диагоналями.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

132. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 48°$, отрезки AK и BM — его высоты. Найдите угол между прямыми AK и BM.

133. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle A = \angle CBD$. Найдите угол ABC, если треугольники ABD и BCD имеют еще одну пару равных углов.

134. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку C проведена прямая, которая параллельна прямой AD и пересекает прямую AB в точке E. Определите вид треугольника ACE.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

135. На плоскости отметили 1000 точек. Докажите, что существует прямая, относительно которой в каждой полуплоскости лежат по 500 точек.

5. Ромб

Вы уже знаете, что прямоугольник — это отдельный вид параллелограмма. Познакомимся еще с одним видом параллелограмма — ромбом.

Определение. Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

На рисунке 47 изображен ромб $ABCD$.

Из определения следует, что ромб имеет все свойства параллелограмма. *В ромбе:*

- *противолежащие углы равны;*
- *диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

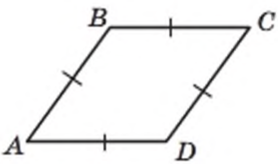


Рис. 47

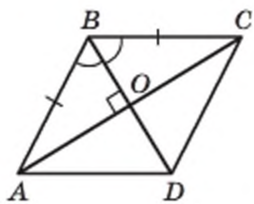


Рис. 48

Однако ромб имеет и свои особые свойства.

Теорема 5.1. ***Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 48 изображен ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $BD \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$.

Поскольку по определению ромба все его стороны равны, то треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). По свойству диагоналей параллелограмма $AO = OC$. Тогда отрезок BO является медианой треугольника ABC, а значит, и высотой и биссектрисой этого треугольника. Следовательно, $BD \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$. ▲

Распознавать ромбы среди параллелограммов позволяют не только определение ромба, но и следующие две теоремы, которые называют признаками ромба.

Теорема 5.2. ***Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.***

Теорема 5.3. ***Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.***

Докажите эти теоремы самостоятельно.

1. Какую фигуру называют ромбом?
2. Какими свойствами обладает ромб?
3. Какими особыми свойствами обладают диагонали ромба?
4. По каким признакам можно установить, что параллелограмм является ромбом?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

136.° Начертите ромб со стороной 5 см и углом 40°. Проведите две высоты из вершины его острого угла и две высоты из вершины тупого угла.

УПРАЖНЕНИЯ

137.° Докажите, что если две соседние стороны параллелограмма равны, то он является ромбом.

138.° Докажите, что четырехугольник, все стороны которого равны, является ромбом.

139.° Диагональ AC ромба $ABCD$ (рис. 49) образует со стороной AD угол 42°. Найдите все углы ромба.

140.° В ромбе $ABCD$ известно, что $\angle C = 140°$, а диагонали пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника AOB.

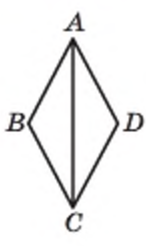


Рис. 49

141.° Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Найдите углы ромба.

142.° Найдите углы ромба, если его периметр равен 24 см, а высота — 3 см.

143.° Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

144.° Угол D ромба $ABCD$ в 8 раз больше угла CAD. Найдите угол BAD.

145.° Углы, которые сторона ромба образует с его диагоналями, относятся как 2 : 7. Найдите углы ромба.

146.° Точки M и K — соответственно середины сторон AB и BC ромба $ABCD$. Докажите, что $MD = KD$.

147.° Точки E и F — соответственно середины сторон BC и CD ромба $ABCD$. Докажите, что $\angle EAC = \angle FAC$.

148.° Докажите, что высоты ромба равны.

149.• Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба пополам. Меньшая диагональ ромба равна 4 см. Найдите углы и периметр ромба.

150.• Докажите, что диагональ ромба делит пополам угол между высотами ромба, проведенными из той же вершины, что и диагональ.

151.• На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отложены равные отрезки AE и AF соответственно. Докажите, что $\angle CEF = \angle CFE$.

152.• Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC. Через точку M проведены прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке K, и прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке D. Докажите, что $AM \perp DK$.

153.• Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекают его стороны BC и AD в точках F и E соответственно. Определите вид четырехугольника $ABFE$.

154.• В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр его биссектрисы BD, который пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Определите вид четырехугольника $BKDP$.

155.• Постройте ромб:

1) по стороне и углу;
2) по двум диагоналям;
3) по высоте и углу.

156.• Постройте ромб:

1) по стороне и диагонали;
2) по высоте и диагонали.

157.•• В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC и AD отметили соответственно точки M и K так, что образовался ромб $AMCK$. Найдите сторону этого ромба.

158.•• Постройте ромб по диагонали и углу, вершина которого принадлежит этой диагонали.

159.•• Постройте ромб по диагонали и противолежащему ей углу ромба.

160.* Постройте ромб:

1) по сумме диагоналей и углу между диагональю и стороной;
2) по острому углу и разности диагоналей;
3) по острому углу и сумме стороны и высоты;
4) по стороне и сумме диагоналей;
5) по тупому углу и сумме диагоналей;
6) по стороне и разности диагоналей.

161.* Даны точки M, N и K. Постройте ромб $ABCD$ так, чтобы точка M была серединой стороны AB, а точки N и K — основаниями высот, проведенных из вершины B к стороне AD и из вершины D к стороне BC соответственно.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

162. На сторонах угла с вершиной в точке A отложены равные отрезки AB и AC. Через точки B и C проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC соответственно, которые пересекаются в точке D. Докажите, что луч AD является биссектрисой угла BAC.

163. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отметили точку D так, что $AD = AB$, а на продолжении этой стороны за точку C — точку E так, что $CE = BC$. Найдите углы и периметр треугольника ABC, если $DE = 18$ см, $\angle BDA = 15°$, $\angle BEC = 36°$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

164. На листе бумаги в клетку выбрали произвольно 100 клеток. Докажите, что среди них можно найти не менее 25 клеток, не имеющих общих точек.

6. Квадрат

Определение. Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

На рисунке 50 изображен квадрат $ABCD$.

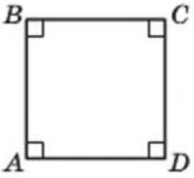


Рис. 50

Рис. 51

Из приведенного определения следует, что квадрат — это ромб, у которого все углы равны. Значит, квадрат является отдельным видом и прямоугольника, и ромба. Это иллюстрирует рисунок 51. Поэтому квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Отсюда следует, что:

- *все углы квадрата прямые;*
- *диагонали квадрата равны, перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

?

1. Какую фигуру называют квадратом?
2. Какой ромб является квадратом?
3. Какими свойствами обладает квадрат?

УПРАЖНЕНИЯ

165.° Докажите, что если один из углов ромба прямой, то этот ромб является квадратом.

166.° Докажите, что если две соседние стороны прямоугольника равны, то этот прямоугольник является квадратом.

167.° Диагональ BD квадрата $ABCD$ равна 5 см. Какова длина диагонали AC? Чему равны углы треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей квадрата?

168.° На стороне BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) отметили точку K так, что $\angle AKB = 74°$. Найдите угол CAK.

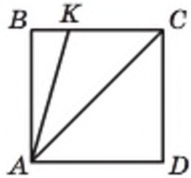


Рис. 52

169.° На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку K так, что $AK = 2BK$. Найдите угол KAD.

170.° Верно ли утверждение:

1) любой квадрат является параллелограммом;
2) любой ромб является квадратом;
3) любой прямоугольник является квадратом;
4) любой квадрат является прямоугольником;
5) любой квадрат является ромбом;
6) если диагонали четырехугольника равны, то он является прямоугольником;
7) если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он является ромбом;
8) существует ромб, который является прямоугольником;
9) существует квадрат, который не является ромбом;
10) если диагонали четырехугольника не перпендикулярны, то он не является ромбом;
11) если диагонали параллелограмма не равны, то он не является прямоугольником;
12) если диагональ прямоугольника делит его угол пополам, то этот прямоугольник является квадратом?

171.• Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Докажите, что точки пересечения этих прямых являются вершинами квадрата.

172.• В прямоугольном треугольнике через точку пересечения биссектрисы прямого угла и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что образовавшийся четырехугольник является квадратом.

173.• Точки M, K, N, P являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $MKNP$ — квадрат.

174.• В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Две стороны квадрата $CDEF$ лежат на катетах треугольника ABC, а вершина E принадлежит гипотенузе AB. Найдите периметр квадрата $CDEF$.

175.• В квадрате $ABCD$ отметили точку M так, что треугольник AMB равносторонний. Докажите, что треугольник CMD равнобедренный.

176.• Докажите, что если диагонали параллелограмма равны и перпендикулярны, то этот параллелограмм является квадратом.

177.• Четырехугольники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — квадраты (рис. 53). Найдите сумму длин тех сторон квадратов, которые не лежат на прямой AV, если длина отрезка AV равна 16 см.

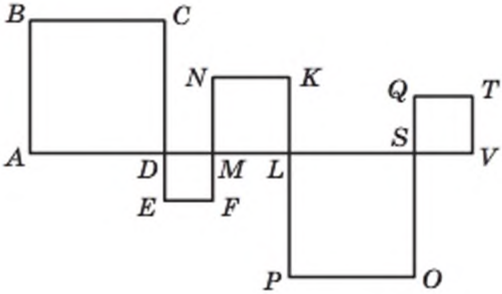


Рис. 53

178.• Постройте квадрат по его стороне.

179.•• Докажите, что точки пересечения биссектрис углов прямоугольника, не являющегося квадратом, являются вершинами квадрата.

180.•• Вершины M и K равностороннего треугольника AMK принадлежат сторонам BC и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MK \parallel BD$.

181.•• Даны точки M и K. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы точка M была серединой стороны AB, а точка K — серединой стороны BC.

182.* Через произвольную точку, принадлежащую квадрату, проведены две перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противолежащие стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, принадлежащие квадрату, равны.

183.* Постройте квадрат:

1) по сумме диагонали и стороны;

2) по разности диагонали и стороны.

184.* В квадрате $ABCD$ отметили точку O так, что $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Докажите, что треугольник BOC равносторонний.

185.* На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили точки M и E так, что углы BAM и MAE равны. Докажите, что $AE = BM + DE$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

186. На рисунке 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Докажите, что $BE \perp DE$.

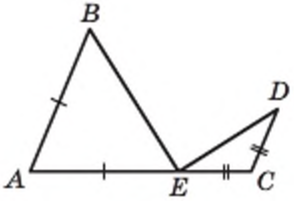


Рис. 54

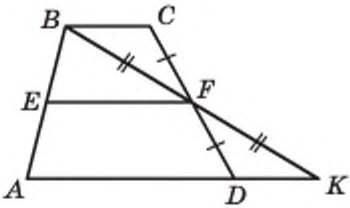


Рис. 55

187. На рисунке 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Докажите, что $EF \parallel BC$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

188. Расположите на плоскости восемь точек так, чтобы на серединном перпендикуляре любого отрезка с концами в этих точках лежало ровно две из этих точек.

7. Средняя линия треугольника

Определение. Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке 56 отрезки MN, NE, EM — средние линии треугольника ABC.

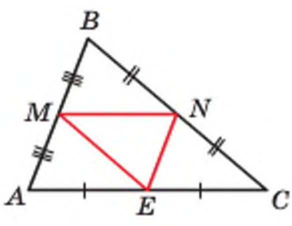


Рис. 56

Теорема 7.1. ***Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.***

Доказательство. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 57). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

На прямой MN отметим точку E так, что $MN = NE$ (рис. 57). Соединим отрезком точки E и C. Поскольку точка N является серединой отрезка BC, то $BN = NC$. Углы 1 и 2 равны как вертикальные. Следовательно, треугольники MBN и ECN равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $MB = EC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Учитывая, что $AM = BM$, получим: $EC = AM$. Углы 3 и 4 являются накрест лежащими при прямых AB и EC и секущей BC. Тогда $AB \parallel EC$.

Таким образом, в четырехугольнике $AMEC$ стороны AM и EC параллельны и равны. Следовательно, по теореме 3.2 четырехугольник $AMEC$ является параллелограммом. Отсюда $ME \parallel AC$, то есть $MN \parallel AC$.

Также $ME = AC$. Поскольку $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

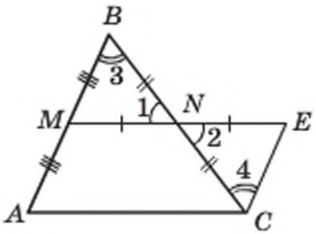


Рис. 57

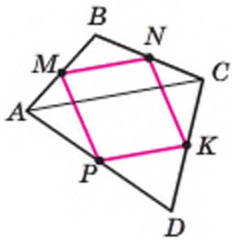


Рис. 58

Задача. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. В четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 58).

Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии треугольника $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Отрезок PK — средняя линия треугольника ADC. По свойству средней линии треугольника $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Поскольку $MN \parallel AC$ и $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

Из равенств $MN = \frac{1}{2}AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$ получаем: $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Следовательно, в четырехугольнике $MNKP$ стороны MN и PK равны и параллельны, поэтому четырехугольник $MNKP$ — параллелограмм.

1. Что называют средней линией треугольника?
2. Сколько средних линий можно провести в треугольнике?
3. Какими свойствами обладает средняя линия треугольника?

УПРАЖНЕНИЯ

189.° Является ли отрезок MK средней линией треугольника ABC (рис. 59)?

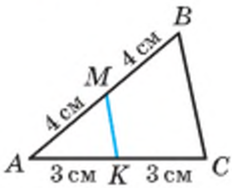


Рис. 59

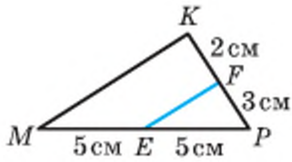


Рис. 60

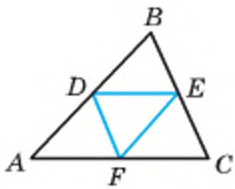


Рис. 61

190.° Является ли отрезок EF средней линией треугольника MKP (рис. 60)?

191.° Отрезки DE и DF — средние линии треугольника ABC (рис. 61). Является ли отрезок EF средней линией этого треугольника?

192.° Стороны треугольника равны 6 см, 8 см и 12 см. Найдите средние линии этого треугольника.

193.° Точки M и K — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника MAK равен 17 см.

194.° Докажите, что периметр треугольника, стороны которого являются средними линиями треугольника ABC, равен половине периметра треугольника ABC.

195.° Определите вид треугольника, в котором средние линии равны между собой.

196.° Докажите, что средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

197.° Точки E и F — соответственно середины сторон AB и BC треугольника ABC. Найдите сторону AC, если она на 7 см больше отрезка EF.

198.° Докажите, что средняя линия DE треугольника ABC (точки D и E принадлежат сторонам AB и BC соответственно) и его медиана BM точкой пересечения делятся пополам.

199.° Докажите, что высота AM треугольника ABC перпендикулярна его средней линии, соединяющей середины сторон AB и AC.

200.• Найдите углы треугольника, две средние линии которого равны и перпендикулярны.

201.• Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 6 см. Найдите стороны данного треугольника, если его периметр равен 46 см.

202.• Сумма диагоналей четырехугольника равна 28 см. Найдите периметр четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырехугольника.

203.• Вершинами четырехугольника являются середины сторон ромба с диагоналями 8 см и 14 см. Определите вид четырехугольника и найдите его стороны.

204.• Вершинами четырехугольника являются середины сторон прямоугольника с диагональю 12 см. Определите вид четырехугольника и найдите его стороны.

205.• Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, на которой лежит его средняя линия.

206.•• На сторонах AB и BC треугольника отметили соответственно точки M и K так, что $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Докажите, что $MK \parallel AC$, и найдите отрезок MK, если $AC = 16$ см.

207.•• Углы BAD и BCE — внешние углы треугольника ABC. Из вершины B проведены перпендикуляры BM и BK к биссектрисам углов BAD и BCE соответственно. Найдите отрезок MK, если периметр треугольника ABC равен 18 см.

208.•• Постройте треугольник по серединам трех его сторон.

209.•• Постройте параллелограмм по серединам трех его сторон.

210.* Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные соответственно сторонам DC и BC. Докажите, что точка пересечения проведенных прямых принадлежит прямой AC.

211.* Стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны. Через середины диагоналей AC и BD проведена прямая, которая пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что $\angle BMN = \angle CNM$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

212. К окружности с центром O через точку C проведены касательные CA и CB (A и B — точки касания). Отрезок AD — диаметр окружности. Докажите, что $BD \parallel CO$.

213. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK — биссектриса треугольника. Через точку K проведена прямая, которая параллельна стороне AB и пересекает сторону AC в точке M. Найдите угол AKM.

214. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой и равна стороне BC. Найдите сторону CD параллелограмма, если точка B удалена от прямой CD на 4 см.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

215. Пять точек принадлежат равностороннему треугольнику, сторона которого равна 1 см. Докажите, что из этих точек можно выбрать две, расстояние между которыми не более 0,5 см.

8. Трапеция

Определение. ***Трапецией*** **называют четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.**

Каждый из четырехугольников, изображенных на рисунке 62, является трапецией.

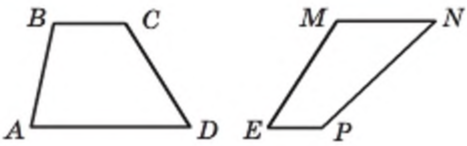


Рис. 62

Параллельные стороны трапеции называют **основаниями**, а непараллельные — **боковыми сторонами** (рис. 63).

Рис. 63

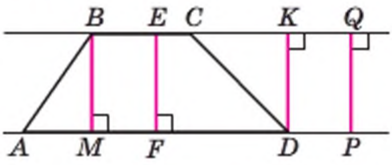


Рис. 64

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) углы A и D называют **углами при основании** AD, а углы B и C — углами при основании BC.

Определение. Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

На рисунке 64 каждый из отрезков BM, EF, DK, PQ является высотой трапеции $ABCD$. Длины этих отрезков равны расстоянию между параллельными прямыми BC и AD. Поэтому $BM = EF = DK = PQ$.

На рисунке 65 изображена трапеция $ABCD$, у которой боковые стороны AB и CD равны. Такую трапецию называют **равнобокой** или **равнобедренной**.

Если боковая сторона трапеции является ее высотой, то такую трапецию называют **прямоугольной** (рис. 66).

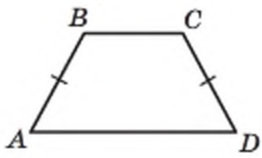


Рис. 65

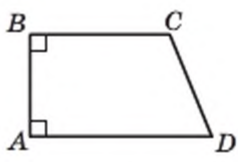


Рис. 66

Трапеция — это отдельный вид четырехугольника. Связь между четырехугольниками и их отдельными видами показана на рисунке 67.

Определение. Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

На рисунке 68 отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема 8.1. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине их суммы.***

Рис. 67

Доказательство. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 69). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

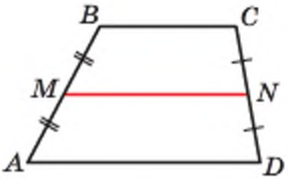


Рис. 68

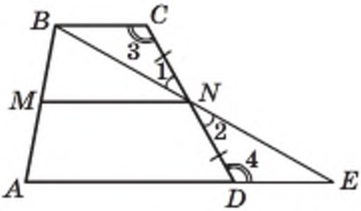


Рис. 69

Проведем прямую BN и точку ее пересечения с прямой AD обозначим буквой E.

Поскольку точка N — середина отрезка CD, то $CN = ND$. Углы 1 и 2 равны как вертикальные, а углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AE и секущей CD. Следовательно, треугольники BCN и EDN равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = DE$ и $BN = NE$. Тогда отрезок MN — средняя линия треугольника ABE. Из этого следует, что $MN \parallel AE$, то есть $MN \parallel AD$, и $MN = \frac{1}{2}AE$. Имеем:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \quad \blacktriangle$$

Задача (свойства равнобокой трапеции). Докажите, что в равнобокой трапеции:

1) углы при каждом основании равны;

2) диагонали равны;

3) высота трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен половине разности оснований, а больший — половине суммы оснований (средней линии трапеции).

Решение. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведем высоты BM и CK (рис. 70). Поскольку $AB = CD$ и $BM = CK$, то прямоугольные треугольники AMB и DKC равны по катету и гипотенузе. Тогда $\angle A = \angle D$.

Имеем: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle DCB$.

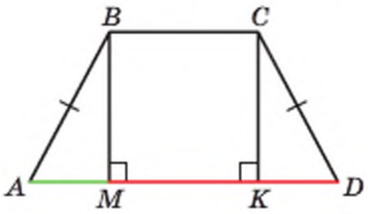


Рис. 70

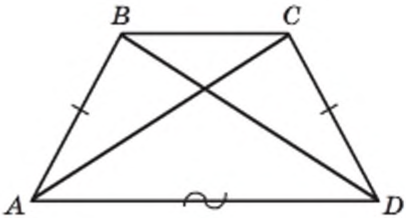


Рис. 71

2) Рассмотрим треугольники ACD и DBA (рис. 71).

Имеем: $AB = CD$, AD — общая сторона, углы BAD и CDA равны как углы при основании равнобокой трапеции. Следовательно, треугольники ACD и DBA равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $AC = BD$.

3) В четырехугольнике $BMKC$ (рис. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, угол BMK прямой. Следовательно, этот четырехугольник является прямоугольником. Отсюда $MK = BC$.

Из равенства треугольников AMB и DKC следует, что $AM = KD$. Тогда

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

1. Какой четырехугольник называют трапецией?

2. Какие стороны трапеции называют основаниями? боковыми сторонами?

3. Что называют высотой трапеции?

4. Какие существуют виды трапеций?

5. Какую трапецию называют равнобокой?

6. Какую трапецию называют прямоугольной?

7. Что называют средней линией трапеции?

8. Сформулируйте теорему о свойствах средней линии трапеции.

9. Сформулируйте свойства равнобокой трапеции.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

216.° Начертите, используя клетки тетради, трапецию:

1) равнобокую;
2) прямоугольную;
3) не являющуюся ни прямоугольной, ни равнобокой;
4) у которой один из углов при основании острый, а другой угол при этом же основании — тупой.

217.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 72, проведите высоты трапеции, одним из концов которых являются соответственно точки B, M, K и D.

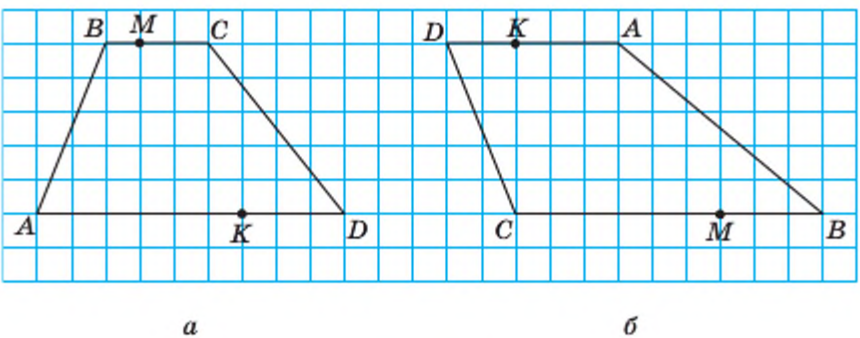
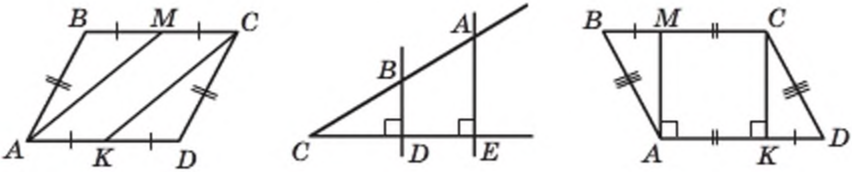


Рис. 72

УПРАЖНЕНИЯ

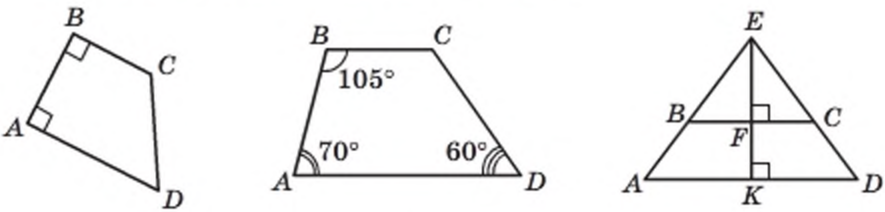
218.° Найдите на рисунке 73 трапеции, укажите их основания и боковые стороны.



а *б* *в*

Рис. 73

219.° Является ли четырехугольник $ABCD$, изображенный на рисунке 74, трапецией? В случае утвердительного ответа укажите основания и боковые стороны трапеции.



а *б* *в*

Рис. 74

220.° Периметр равнобокой трапеции равен 52 см, основания — 13 см и 21 см. Найдите боковую сторону трапеции.

221.° Периметр трапеции равен 49 см, боковые стороны — 5,6 см и 7,8 см. Найдите основания трапеции, если одно из них на 7,4 см больше другого.

222.° Докажите, что сумма углов трапеции, прилежащих к ее боковой стороне, равна 180°.

223.° 1) Найдите углы A и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle B = 132°$, $\angle D = 24°$.

2) Найдите углы трапеции $ABCD$, прилежащие к боковой стороне AB, если угол A меньше угла B на 38°.

224.° Найдите углы трапеции $ABCD$, прилежащие к боковой стороне CD, если $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225.° Один из углов равнобокой трапеции равен 46°. Найдите остальные ее углы.

226.° Найдите углы равнобокой трапеции, если разность ее противолежащих углов равна 20°.

227.° В равнобокой трапеции угол между боковой стороной и высотой, проведенной из вершины тупого угла, равен 23°. Найдите углы трапеции.

228.° Могут ли у трапеции быть:

1) три прямых угла;

2) три острых угла;

3) два противолежащих угла тупыми;

4) два противолежащих угла прямыми;

5) два противолежащих угла равными?

229.° Могут ли:

1) основания трапеции быть равными;

2) диагонали трапеции точкой пересечения делиться пополам?

230.° Докажите, что если углы при одном из оснований трапеции равны, то данная трапеция является равнобокой.

231.° Докажите, что сумма противолежащих углов равнобокой трапеции равна 180°. Верно ли обратное утверждение: если сумма противолежащих углов трапеции равна 180°, то данная трапеция является равнобокой?

232.° Средняя линия равностороннего треугольника со стороной 6 см разбивает его на треугольник и четырехугольник. Определите вид четырехугольника и найдите его периметр.

233.° Высота равнобокой трапеции, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите основания трапеции.

234.° Один из углов равнобокой трапеции равен 60°, боковая сторона — 18 см, а сумма оснований — 50 см. Найдите основания трапеции.

235.° Основания прямоугольной трапеции равны 10 см и 24 см, а один из углов — 45°. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

236.° Основания прямоугольной трапеции равны 7 см и 15 см, а один из углов — 60°. Найдите бóльшую боковую сторону трапеции.

237.° В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Найдите углы ACB и ACD.

238.° В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Найдите углы трапеции.

239.° В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 6 см. Через вершину B проведена прямая, которая параллельна стороне CD и пересекает сторону AD в точке M. Найдите периметр трапеции, если периметр треугольника ABM равен 16 см.

240.° Через вершину C трапеции $ABCD$ проведена прямая, которая параллельна боковой стороне AB и пересекает большее основание AD в точке E. Найдите углы трапеции, если $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241.° Основания трапеции равны 9 см и 15 см. Чему равна ее средняя линия?

242.° Средняя линия трапеции равна 8 см, а одно из оснований — 5 см. Найдите другое основание трапеции.

243.° Одно из оснований трапеции на 8 см больше другого, а средняя линия равна 17 см. Найдите основания трапеции.

244.° Основания трапеции относятся как 3 : 4, а средняя линия равна 14 см. Найдите основания трапеции.

245.° Каждая из боковых сторон трапеции $ABCD$ (рис. 75) разделена на четыре равные части: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Найдите отрезки EN, FM и KP, если $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

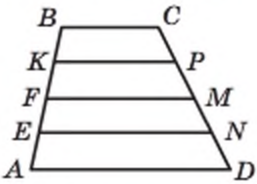


Рис. 75

246.° Высота прямоугольной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 7 см и 5 см, считая от вершины прямого угла. Найдите среднюю линию трапеции.

247.° Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9 см, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых в 2 раза больше другого, считая от вершины прямого угла. Найдите основания трапеции.

248.• Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = OD$ и $BO = OC$.

249.• Высота равнобокой трапеции равна h, а боковая сторона видна из точки пересечения диагоналей под углом[1] 60°. Найдите диагональ трапеции.

---

[1] Пусть даны отрезок AB и точка M, не лежащая на прямой AB, такая, что $\angle AMB = \alpha$. В таком случае говорят, что отрезок AB виден из точки M под углом α.

250.• Основания равнобокой трапеции относятся как 2 : 5, а диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите стороны трапеции, если ее периметр равен 68 см.

251.• В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр равен 60 см. Найдите неизвестные стороны трапеции.

252.• Стороны трапеции равны a, a, a и $2a$. Найдите углы трапеции.

253.• В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла BAD, $\angle D = 60°$, периметр трапеции равен 40 см. Найдите основания трапеции.

254.• Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, а меньшее основание равно боковой стороне. Найдите углы трапеции.

255.• При каком условии высота равнобокой трапеции равна половине разности оснований?

256.• Постройте равнобокую трапецию по основанию, боковой стороне и углу между ними.

257.• Постройте прямоугольную трапецию по основаниям и меньшей боковой стороне.

258.• Постройте равнобокую трапецию по основанию, боковой стороне и диагонали.

259.• Боковая сторона равнобокой трапеции равна 6 см, большее основание — 10 см. Найдите среднюю линию трапеции, если один из ее углов равен 60°.

260.• Диагональ равнобокой трапеции равна 14 см и образует с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

261.• Средняя линия трапеции $ABCD$ разбивает ее на две трапеции, средние линии которых равны 15 см и 19 см. Найдите основания трапеции $ABCD$.

262.•• Докажите, что если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то ее высота равна средней линии трапеции.

263.•• Докажите, что если высота равнобокой трапеции равна ее средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны.

264.•• Диагональ прямоугольной трапеции разбивает ее на два треугольника, один из которых равносторонний со стороной a. Найдите среднюю линию трапеции.

265.•• Диагональ равнобокой трапеции разбивает ее на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

266.•• В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30^\circ$, $BD = 8$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

267.•• Докажите, что точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, принадлежит прямой, содержащей ее среднюю линию.

268.•• Постройте трапецию:

1) по основаниям и боковым сторонам;
2) по основанию, высоте и диагоналям;
3) по разности оснований, боковым сторонам и одной из диагоналей.

269.•• Постройте равнобокую трапецию по основанию, высоте и боковой стороне.

270.•• Постройте трапецию:

1) по основаниям и диагоналям;
2) по боковым сторонам, средней линии и высоте;
3) по основанию, прилежащему к нему углу и боковым сторонам;
4) по боковым сторонам, высоте и одной из диагоналей.

271.* Через вершину B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, которая не имеет с параллелограммом других общих точек. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b соответственно. Найдите расстояние от точки D до этой прямой.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

272. В окружности проведены диаметры AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AC \parallel BD$.

273. В окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC. Докажите, что $\angle BOC = 2\angle BAC$.

274. Прямая AB касается окружности с центром O в точке C, $AC = BC$. Докажите, что $OA = OB$.

275. Хорда AB окружности с центром O перпендикулярна радиусу OC и делит его пополам. Найдите: 1) угол AOB; 2) угол ACB.

276. Сколько общих точек имеют две окружности с радиусами 6 см и 8 см, если расстояние между их центрами равно: 1) 15 см; 2) 14 см; 3) 10 см; 4) 2 см?

Повторите содержание пунктов 19–22 на с. 205–207.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

277. Многоугольник разбит на треугольники, которые окрашены в черный и белый цвета так, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Докажите, что количество черных треугольников не больше утроенного количества белых треугольников.

9. Центральные и вписанные углы

Определение. Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

На рисунке 76 угол AOB — центральный. Стороны этого угла пересекают окружность в точках A и B. Эти точки делят окружность на две **дуги**, выделенные на рисунке 76 разным цветом. Точки A и B называют **концами** дуги, они принадлежат каждой из выделенных дуг. Каждую из этих дуг можно обозначить так: $\smile AB$ (читают: «дуга AB»).

Однако по записи $\smile AB$ невозможно отличить дуги на рисунке 76. Если на какой-нибудь из двух дуг отметить точку (на рисунке 77 это точка M), то понятно, что обозначение $\smile AMB$ относится к «синей» дуге. Если на одной из двух дуг AB отмечена точка, то договоримся, что обозначение $\smile AB$ относится к дуге, которой эта точка не принадлежит (на рисунке 77 это «зеленая» дуга).

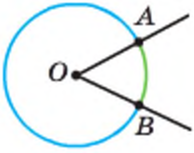


Рис. 76

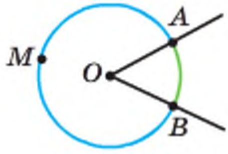


Рис. 77

Дуга AB принадлежит центральному углу AOB (рис. 77). В этом случае говорят, что центральный угол AOB **опирается на дугу** AB.

Каждая дуга окружности, как и вся окружность, имеет **градусную меру**. *Градусную меру всей окружности считают равной* $360°$. Если центральный угол MON опирается на дугу MN (рис. 78), то

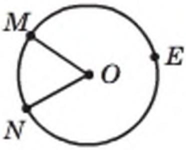


Рис. 78

градусную меру дуги MN считают равной градусной мере угла MON и записывают: $\cup MN = \angle MON$ (читают: «градусная мера дуги MN равна градусной мере угла MON»). Градусную меру дуги MEN (рис. 78) считают равной $360° - \angle MON$.

На рисунке 79 изображена окружность, в которой проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. Тогда $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Каждую из дуг ACB и ADB называют **полуокружностью**. На рисунке 79 полуокружностями являются также дуги CAD и CBD.

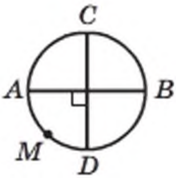


Рис. 79

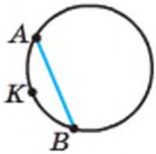


Рис. 80

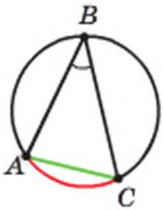


Рис. 81

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что хорда **стягивает** дугу. На рисунке 80 хорда AB стягивает каждую из дуг AB и AKB.

Любая хорда стягивает две дуги, сумма градусных мер которых равна $360°$.

Определение. Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность.

На рисунке 81 угол ABC — вписанный. Дуга AC принадлежит этому углу, а дуга ABC — не принадлежит. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC **опирается на дугу** AC. Также можно сказать, что вписанный угол ABC **опирается на хорду** AC.

Теорема 9.1. ***Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.***

Доказательство. На рисунке 81 угол ABC вписанный. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Рассмотрим три случая расположения центра O окружности относительно вписанного угла ABC.

Случай 1. Центр O принадлежит одной из сторон угла, например стороне BC (рис. 82).

Проведем радиус OA. Центральный угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO (стороны OA и OB равны как радиусы). Тогда $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Однако $\angle A = \angle B$. Отсюда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$.

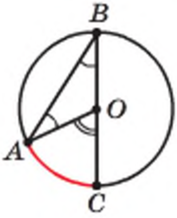


Рис. 82

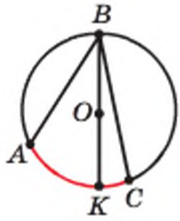


Рис. 83

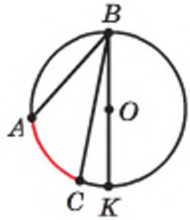


Рис. 84

Случай 2. Центр O принадлежит углу, однако не принадлежит ни одной из его сторон (рис. 83).

Проведем диаметр BK. Согласно доказанному $\angle ABK = \frac{1}{2}\cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2}\cup KC$. Имеем:

$$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2}\cup AK + \frac{1}{2}\cup KC = \frac{1}{2}\cup AKC.$$

Случай 3. Центр O не принадлежит углу (рис. 84).

Для третьего случая проведите доказательство самостоятельно. ▲

Рис. 85

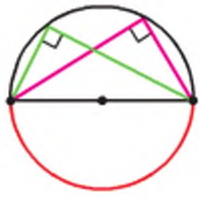


Рис. 86

Следствие 1. ***Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны*** (рис. 85).

Следствие 2. ***Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой*** (рис. 86).

Докажите эти свойства самостоятельно.

Задача 1 (свойство угла между касательной и хордой). Отрезок AB — хорда окружности с центром O (рис. 87). Через точку A проведена касательная MN. Докажите, что

$\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ и $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup ADB$.

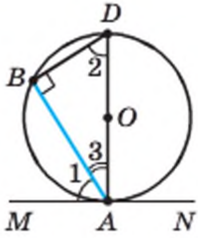


Рис. 87

Решение. Проведем диаметр AD (рис. 87). Тогда угол B равен $90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр AD. В прямоугольном треугольнике ABD $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Поскольку MN — касательная, то $\angle DAM = 90°$. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Получаем, что $\angle 1 = \angle 2$.

Следовательно, $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$.

Имеем:

$$\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2} \cup AB = 180° - \frac{1}{2}(360° - \cup ADB) =$$

$$= 180° - 180° + \frac{1}{2} \cup ADB = \frac{1}{2} \cup ADB.$$

Задача 2. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку, лежащую вне окружности.

Решение. На рисунке 88 изображены окружность с центром O и точка M, лежащая вне этой окружности.

Пусть X — такая точка окружности, что прямая MX является касательной (рис. 88). Тогда угол MXO прямой. Следовательно, его можно рассматривать как вписанный в окружность с диаметром MO.

Проведенный анализ показывает, как провести построение.

Построим отрезок MO и разделим его пополам (рис. 89). Пусть точка K — его середина. Построим окружность радиуса KO с центром K. Обозначим точки пересечения построенной и данной окружностей буквами E и F. Тогда каждая из прямых ME и MF является искомой касательной.

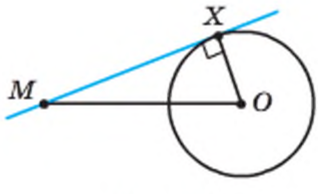


Рис. 88

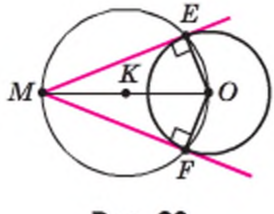


Рис. 89

Действительно, угол MEO равен $90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр MO. Отрезок OE — радиус данной окружности. Тогда по признаку касательной прямая ME — искомая касательная.

1. Какой угол называют центральным углом окружности?
2. Как называют части окружности, на которые делят ее две точки?
3. Каким символом обозначают дугу окружности?
4. В каком случае говорят, что центральный угол опирается на дугу?
5. Чему считают равной градусную меру окружности?
6. Как связаны градусные меры центрального угла окружности и дуги, на которую этот угол опирается?
7. Сколько дуг стягивает каждая хорда? Чему равна сумма их градусных мер?
8. Какой угол называют вписанным углом окружности?
9. В каком случае говорят, что вписанный угол опирается на дугу?
10. Чему равна градусная мера вписанного угла?
11. Каким свойством обладают вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
12. Каким является вписанный угол, опирающийся на диаметр?

УПРАЖНЕНИЯ

278.° Чему равна градусная мера центрального угла окружности, опирающегося на дугу, которая составляет: 1) $\frac{1}{6}$ окружности; 2) $\frac{1}{10}$ окружности; 3) $\frac{1}{2}$ окружности; 4) $\frac{2}{9}$ окружности?

279.° Найдите градусные меры двух дуг окружности, на которые ее делят две точки, если градусная мера одной из дуг на $80°$ больше градусной меры другой.

280.° Найдите градусные меры двух дуг окружности, на которые ее делят две точки, если градусные меры этих дуг относятся как $7 : 11$.

281.° Найдите градусную меру дуги, которую описывает конец часовой стрелки: 1) за 2 ч; 2) за 5 ч; 3) за 8 ч; 4) за 30 мин; 5) за 12 ч.

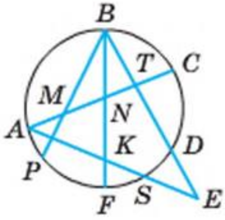


Рис. 90

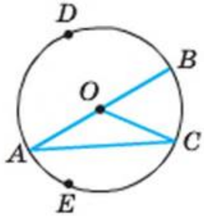


Рис. 91

282.° Какие из углов, изображенных на рисунке 90, являются вписанными? На какую дугу опирается каждый из вписанных углов?

283.° На рисунке 91 изображена окружность с центром O. Найдите:

1) угол BDC, если $\angle BAC = 40°$;
2) угол BEC, если $\angle BOC = 70°$;
3) дугу CE, если $\angle CDE = 80°$;
4) угол DBA, если $\cup DBA = 300°$.

284.° Найдите ошибки на рисунке 92.

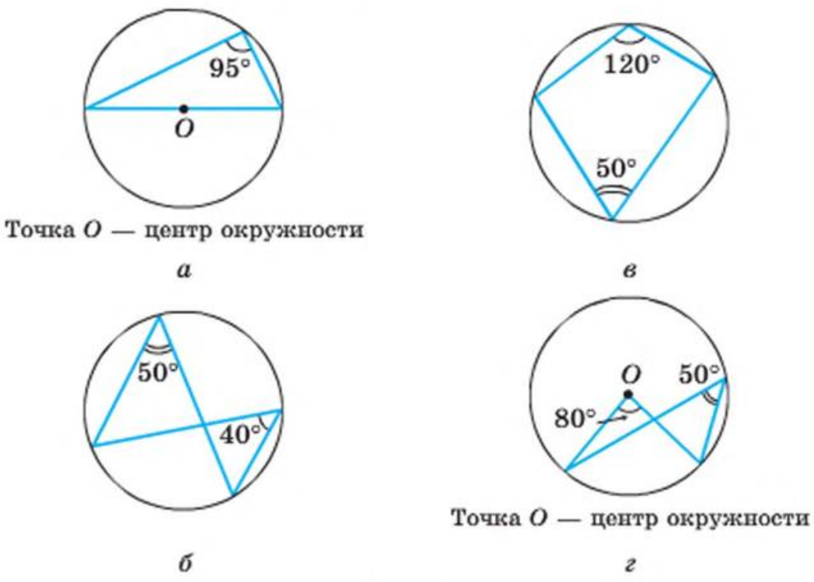


Рис. 92

285.° Найдите вписанный угол, если градусная мера дуги, на которую он опирается, равна: 1) 84°; 2) 110°; 3) 230°; 4) 340°.

286.° На рисунке 93 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Найдите дугу BC.

287.° На рисунке 93 $\cup AB = 64°$, $\cup BC = 92°$. Найдите угол ABC.

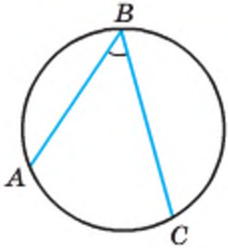


Рис. 93

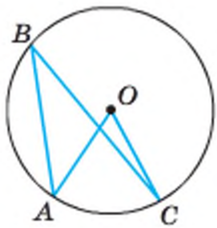


Рис. 94

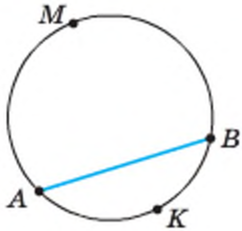


Рис. 95

288.° Центральный угол AOC на 25° больше вписанного угла ABC, опирающегося на дугу AC (рис. 94). Найдите углы AOC и ABC.

289.° Концы хорды AB делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек M и K (рис. 95)?

290.° На рисунке 96 хорды AB и CD равны. Докажите, что $\cup AMB = \cup CND$.

291.° Докажите, что если две дуги окружности равны, то равны и хорды, их стягивающие.

292.° Точки A, B и C делят окружность на три дуги так, что $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 1 : 2 : 3$. Найдите углы треугольника ABC.

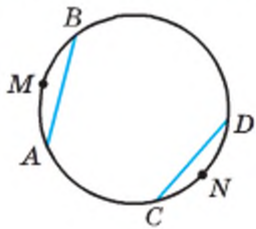


Рис. 96

293.° Вершины равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делят описанную около него окружность на три дуги, причем $\cup AB = 70°$. Найдите углы треугольника ABC.

294.° Концы диаметров AC и BD окружности последовательно соединены так, что образовался четырехугольник $ABCD$.
1) Определите вид четырехугольника $ABCD$.
2) Найдите дуги AB, BC, CD и AD, если $\angle ABD = 80°$.

295.° Острый угол прямоугольного треугольника равен 32°. Найдите градусные меры дуг, на которые вершины треугольника делят окружность, описанную около него, и радиус этой окружности, если гипотенуза данного треугольника равна 12 см.

296.• Докажите, что если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр.

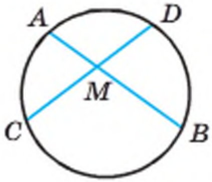


Рис. 97

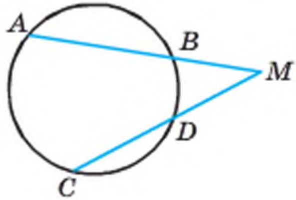


Рис. 98

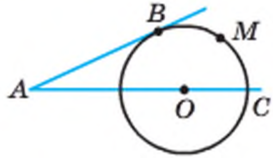


Рис. 99

297. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 97). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

298. Хорды AB и CD окружности не пересекаются, а прямые AB и CD пересекаются в точке M (рис. 98). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

299. Через точку A, лежащую вне окружности с центром O, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а вторая проходит через ее центр (рис. 99). Известно, что $\cup BMC = 100°$. Найдите угол BAC.

300. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке D. Найдите углы треугольника ADC, если $\angle ABC = 80°$.

301. На дуге AC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, отметили точку M так, что $\cup AM = 2 \cup CM$. Найдите углы треугольника AMC.

302. Окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, пересекает прямые AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезки AK и BM — высоты треугольника ABC.

303. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB в точке K так, что $\angle ACK = \angle BCK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

304. Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключенных между двумя параллельными хордами, равны.

305. Вершины квадрата $ABCD$ лежат на окружности. На дуге AB отмечена произвольная точка M. Докажите, что $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

306. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 56°. На боковой стороне треугольника как на диаметре построена полуокружность, которую остальные стороны треугольника делят на три дуги. Найдите градусные меры образовавшихся дуг.

307.** Как, пользуясь только угольником, найти центр данной окружности?

308.** Дана окружность, в которой проведен диаметр AB. Вне окружности отметили точку C так, как показано на рисунке 100. Как, пользуясь только линейкой, провести через точку C прямую, перпендикулярную прямой AB?

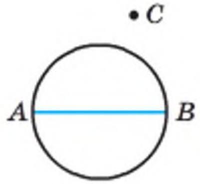


Рис. 100

309.** Две окружности имеют единственную общую точку M. Через точку M проведены две прямые, пересекающие данные окружности. Точки их пересечения с окружностями, отличные от точки M, соединены хордами. Докажите, что эти хорды параллельны.

310.** К окружности, описанной около треугольника ABC, проведена в точке B касательная, пересекающая прямую AC в точке D. Отрезок BM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD = MD$.

311.* Даны отрезок AB и угол α. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\angle AXB = \alpha$.

312.* Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной к данной стороне.

313.* Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведенной к данной стороне.

314.* Постройте параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

315.* Постройте параллелограмм по углу и двум диагоналям.

316.* В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная, пересекающая катет CB в точке D. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

317.* Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек X таких, что треугольник AXB прямоугольный.

318.* Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DO = DB = DC$.

319.* Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1B_1 \perp CC_1$.

320.* На рисунке 101 изображены две окружности с центрами O_1 и O_2. Постройте прямую l, которая касается этих окружностей так, что точки касания лежат в одной полуплоскости относительно прямой O_1O_2 (такую прямую называют **внешней общей касательной** к двум данным окружностям).

321.* Постройте треугольник:

1) по стороне, противолежащему ей углу и радиусу вписанной окружности;
2) по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведенной к другой стороне.

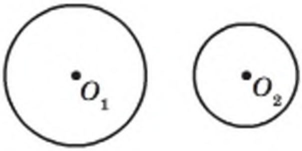


Рис. 101

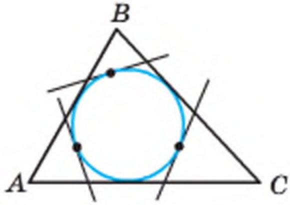


Рис. 102

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

322. Периметр треугольника ABC равен 30 см. Точка касания вписанной окружности со стороной AB делит ее в отношении 3 : 2, считая от вершины A, а точка касания со стороной BC удалена от вершины C на 5 см. Найдите стороны треугольника.

323. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные (рис. 102). Периметры треугольников, которые эти касательные отсекают от данного треугольника, равны P_1, P_2 и P_3. Найдите периметр треугольника ABC.

324. Определите вид треугольника, у которого центр описанной окружности принадлежит медиане.

Повторите содержание пункта 22 на с. 206, 207.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

325. Клетки квадрата размером 100×100 клеток раскрашены в шахматном порядке. Квадрат разрезали на квадраты, стороны которых содержат нечетное количество клеток, и в каждом таком квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток отмечено поровну.

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ПЕРВОЙ ВСЕУКРАИНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Надеемся, что задача 316 вам понравилась и вы испытали радость успеха, решив ее. Эта задача примечательна тем, что в 1961 г. именно ее условием открывался текст первой Всеукраинской олимпиады юных математиков.

Вообще, математические олимпиады в Украине имеют давнюю традицию. Первая городская олимпиада юных математиков состоялась в 1935 г. в Киеве. С тех пор прошло более 80 лет, и за эти годы математические олимпиады стали для многих талантливых школьников первым шагом на пути к научному творчеству. Сегодня такие имена, как А. В. Погорелов, С. Г. Крейн, М. А. Красносельский, В. Г. Дринфельд, известны во всем научном мире. Все они в разные годы были победителями математических олимпиад в Украине.

Хотим с удовлетворением отметить, что и сегодня математические олимпиады в Украине очень популярны. Десятки тысяч школьников нашей страны на разных этапах принимают участие в этом математическом соревновании. В организации и проведении олимпиад задействованы лучшие ученые, методисты, учителя. Именно благодаря их энтузиазму и профессионализму команда Украины достойно представляет нашу страну на международных математических олимпиадах.

Советуем и вам, дорогие восьмиклассники, принимать участие в математических олимпиадах. Ниже мы приводим текст первой Всеукраинской олимпиады юных математиков. Испытайте свои силы.

1. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная, пересекающая катет CB в точке D. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.
2. В плоскости расположены n зубчатых колес так, что первое сцеплено со вторым, второе — с третьим и т. д., а последнее — с первым. В каких случаях могут вращаться колеса такой системы?

3. Вычислите углы равнобедренного треугольника, у которого центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно прямой, содержащей основание треугольника.
4. Докажите, что при каждом целом n выражение $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ также принимает целые значения.
5. Постройте треугольник по двум данным точкам, которые являются основаниями высот, опущенных на две стороны этого треугольника, и прямой, на которой лежит его третья сторона.

10. Описанная и вписанная окружности четырехугольника

Определение. Окружность называют описанной около четырехугольника, если она проходит через все его вершины.

На рисунке 103 изображена окружность, описанная около четырехугольника $ABCD$. В этом случае также говорят, что четырехугольник **вписан** в окружность.

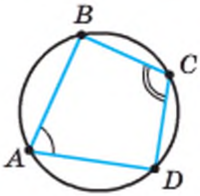


Рис. 103

Теорема 10.1. ***Если четырехугольник является вписанным в окружность, то сумма его противолежащих углов равна*** **180°.**

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 103). Докажем, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$.

Поскольку углы A и C являются вписанными, то $\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD$ и $\angle C = \frac{1}{2} \smile DAB$.

Имеем: $\smile BCD + \smile DAB = 360°$. Тогда $\angle A + \angle C = 180°$.
Аналогично можно показать, что $\angle B + \angle D = 180°$. ▲

Вы знаете, что около любого треугольника можно описать окружность. Однако не всякий четырехугольник обладает таким свойством. Например, нельзя описать окружность около параллелограмма, отличного от прямоугольника. Распознавать четырехугольники, около которых можно описать окружность, позволяет следующая теорема.

Теорема 10.2 (обратная теореме 10.1). ***Если в четырехугольнике сумма противолежащих углов равна*** **180°**, ***то около него можно описать окружность.***

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle C = 180°$. Докажем, что около него можно описать окружность.

Предположим, что около этого четырехугольника нельзя описать окружность. Опишем окружность около треугольника ABD. По предположению точка C не принадлежит этой окружности. Поэтому возможны два случая.

Случай 1. Точка C лежит вне описанной окружности треугольника ABD (рис. 104).

Пусть сторона BC пересекает окружность в точке C_1. Четырехугольник ABC_1D вписан в окружность. Тогда по теореме 10.1 получаем, что $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Но по условию $\angle A + \angle C = 180°$. Отсюда $\angle BC_1D = \angle C$. Однако это равенство выполняться не может, так как по свойству внешнего угла треугольника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Итак, точка C не может лежать вне окружности, описанной около треугольника ABD.

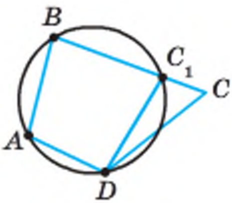


Рис. 104

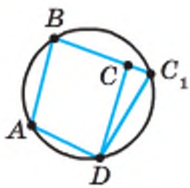


Рис. 105

Случай 2. Точка C лежит внутри описанной окружности треугольника ABD (рис. 105). Рассуждая аналогично, можно показать, что точка C не может лежать внутри рассматриваемой окружности. Убедитесь в этом самостоятельно.

Таким образом, предположив, что точка C не принадлежит окружности, описанной около треугольника ABD, мы получили противоречие. ▲

Теорему 10.2 можно рассматривать как признак принадлежности четырех точек одной окружности.

Если четырехугольник вписан в окружность, то существует точка, равноудаленная от всех его вершин (центр описанной окружности). Чтобы найти эту точку, достаточно найти точку пересечения серединных перпендикуляров двух соседних сторон четырехугольника.

Определение. **Окружность называют вписанной в четырехугольник, если она касается всех его сторон.**

На рисунке 106 изображена окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$. В этом случае также говорят, что четырехугольник **описан** около окружности.

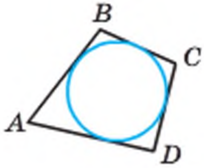


Рис. 106

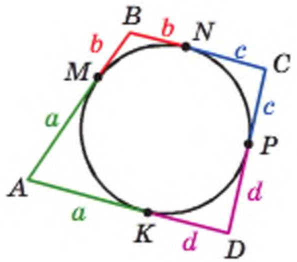


Рис. 107

Теорема 10.3. ***Если четырехугольник является описанным около окружности, то суммы его противолежащих сторон равны.***

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 107). Докажем, что $AB + CD = BC + AD$.

Точки M, N, P, K — точки касания окружности со сторонами четырехугольника.

Поскольку отрезки касательных, проведенных к окружности через одну точку, равны, то $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Пусть $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

Тогда $AB + CD = a + b + c + d$,

$BC + AD = b + c + a + d$.

Следовательно, $AB + CD = BC + AD$. ▲

Вы знаете, что в любой треугольник можно вписать окружность. Однако не всякий четырехугольник обладает таким свойством. Например, нельзя вписать окружность в прямоугольник, отличный от квадрата. Распознавать четырехугольники, в которые можно вписать окружность, позволяет следующая теорема.

Теорема 10.4. ***Если в выпуклом четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.***

Доказательство. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность.

Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 108). Тогда точка O равноудалена от сторон AB, BC и AD. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, которая касается этих трех сторон.

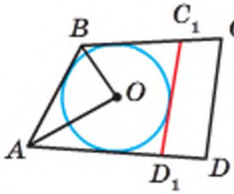


Рис. 108

Предположим, что эта окружность не касается стороны CD. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Сторона CD не имеет общих точек с построенной окружностью.

Проведем касательную C_1D_1 параллельно стороне CD (рис. 108). Четырехугольник ABC_1D_1 описан около окружности. Тогда по теореме 10.3 получаем, что

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \qquad (1)$$

Однако по условию

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (2)$$

Вычтем из равенства (2) равенство (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Отсюда имеем: $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$. Это равенство противоречит утверждению, доказанному в ключевой задаче п. 1.

Итак, сторона CD должна иметь общие точки с рассматриваемой окружностью.

Случай 2. Сторона CD имеет две общие точки с построенной окружностью.

Рассуждая аналогично, можно показать, что сторона CD не может иметь две общие точки с построенной окружностью. Убедитесь в этом самостоятельно.

Таким образом, предположив, что построенная окружность не касается стороны CD, мы получили противоречие. ▲

Если четырехугольник описан около окружности, то существует точка, равноудаленная от всех его сторон (центр вписанной окружности). Чтобы найти эту точку, достаточно найти точку пересечения биссектрис двух соседних углов этого четырехугольника.

Задача (признак принадлежности четырех точек одной окружности). Точки A, M, N, B таковы, что $\angle AMB = \angle ANB$, причем точки M и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Докажите, что точки A, M, N, B лежат на одной окружности.

Решение. Пусть $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Около треугольника AMB опишем окружность (рис. 109). Пусть C — произвольная точка окружности, не принадлежащая дуге AMB. Тогда четырехугольник $ACBM$ вписан в окружность. Отсюда $\angle C = 180° - \alpha$. Имеем: $\angle C + \angle N = 180°$. Следовательно, по теореме 10.2 около четырехугольника $ACBN$ можно описать окружность. Поскольку около треугольника ABC можно описать только одну окружность, то этой окружности принадлежат как точка M, так и точка N. ●

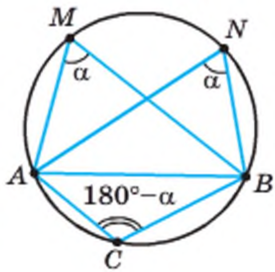


Рис. 109

1. Какую окружность называют описанной около четырехугольника?
2. В каком случае говорят, что четырехугольник вписан в окружность?
3. Каким свойством обладают углы четырехугольника, вписанного в окружность?
4. При каком условии около четырехугольника можно описать окружность?
5. Какую окружность называют вписанной в четырехугольник?
6. В каком случае говорят, что четырехугольник описан около окружности?
7. Каким свойством обладают стороны четырехугольника, описанного около окружности?
8. При каком условии в четырехугольник можно вписать окружность?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

326.° Начертите прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Опишите около него окружность.

327.° Начертите произвольную равнобокую трапецию. Опишите около нее окружность.

328.° Начертите равнобокую трапецию с бóльшим основанием 6 см, боковой стороной 4 см и углом 60°. Впишите в нее окружность.

329.° Начертите произвольный квадрат. Впишите в него окружность и опишите около него окружность.

УПРАЖНЕНИЯ

330.° Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если его углы A, B, C и D соответственно равны:
1) 90°, 90°, 80°, 100°;
2) 90°, 80°, 90°, 100°;
3) 50°, 70°, 130°, 110°?

331.° Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если его углы A, B, C и D соответственно пропорциональны числам:
1) 3, 8, 11, 6;
2) 4, 5, 4, 2?

332.° Докажите, что можно описать окружность около:
1) любого прямоугольника;
2) любой равнобокой трапеции.

333.° Какая точка является центром окружности, описанной около прямоугольника?

334.° Можно ли описать окружность около ромба, не являющегося квадратом?

335.° В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около данного прямоугольника.

336.° Можно ли вписать окружность в четырехугольник $ABCD$, если его стороны AB, BC, CD, AD соответственно пропорциональны числам:
1) 7, 8, 12, 11;
2) 7, 12, 8, 11?

337.° Сумма двух противолежащих сторон четырехугольника, описанного около окружности, равна 18 см. Найдите периметр данного четырехугольника.

338.° Боковая сторона равнобокой трапеции равна 7 см. Чему равен периметр данной трапеции, если в нее можно вписать окружность?

339.° В четырехугольнике $CDEF$, в который можно вписать окружность, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Найдите сторону CF.

340.° Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Какая точка является центром окружности, вписанной в ромб?

341.° Можно ли вписать окружность в параллелограмм, который не является ромбом?

342.° Под каким углом видна боковая сторона трапеции из центра вписанной окружности?

343.° Один из углов ромба равен 60°, а бóльшая диагональ равна 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный ромб.

344.• Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник является квадратом.

345.• Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб является квадратом.

346.• Сторона AD четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Найдите углы BAD, ADC, CAD, BDA.

347.• Найдите углы четырехугольника $MNKP$, вписанного в окружность, если $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

348.• Равнобокая трапеция вписана в окружность, центр которой принадлежит одному из оснований. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий ее боковой стороне, равен 56°. Найдите углы трапеции.

349.• Высоты BM и CK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что точки A, K, H и M лежат на одной окружности.

350.• В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найдите периметр данной трапеции, если радиус вписанной окружности равен 20 см.

351.• В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найдите радиус вписанной окружности, если периметр трапеции равен 54 см.

352.•• Центр окружности, описанной около трапеции, принадлежит большему основанию, а боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.

353.•• Диагональ трапеции, вписанной в окружность, равна d. Боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120°. Найдите среднюю линию трапеции.

354.•• Боковые стороны и меньшее основание равнобокой трапеции равны 6 см, а один из ее углов равен 60°. Найдите радиус окружности, описанной около данной трапеции.

355.•• Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.

356.•• Из произвольной точки O, которая принадлежит острому углу A, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры OB и OC на стороны угла. Докажите, что $\angle OAB = \angle OCB$.

357.• Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle A = 60°$. Найдите угол CMK.

358.• Биссектрисы MA и KB треугольника MNK пересекаются в точке O, точки A, N, B и O лежат на одной окружности. Найдите угол N.

359.• Вне прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузе AB построен квадрат $ABFD$. Докажите, что $\angle ACO = \angle OCB$, где O — точка пересечения диагоналей квадрата.

360.• Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P (рис. 110). Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.

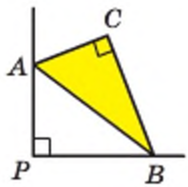


Рис. 110

361.• Из произвольной точки M, принадлежащей острому углу с вершиной A, но не принадлежащей его сторонам, проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Из точки A проведен перпендикуляр AK к отрезку PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

362.• В остроугольном треугольнике ABC отрезки CC_1 и AA_1 — высоты. Докажите, что серединный перпендикуляр отрезка C_1A_1 проходит через середину стороны AC.

363.• На боковых сторонах трапеции, в которую можно вписать окружность, как на диаметрах построены две окружности. Докажите, что эти окружности имеют одну общую точку.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

364. Через середину диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD. Эта прямая пересекает прямые AB и CD в точках M и K соответственно. Определите вид четырехугольника $AMCK$.

365. В треугольнике ABC отрезок AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, которая параллельна стороне AC и пересекает сторону AB в точке E. Через точку E проведена прямая, которая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $AE = CF$.

366. Высота BM ромба $ABCD$, опущенная из вершины тупого угла на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке K, $\angle BKC = 64°$. Найдите угол ABC.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

367. Можно ли квадрат разрезать на тысячеугольник и 199 пятиугольников?

ЗАДАНИЕ № 1 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

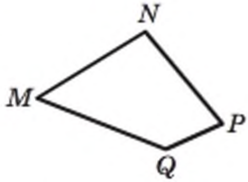


Рис. 111

1. Каким из представленных способов можно обозначить четырехугольник, изображенный на рисунке 111?

А) $MPQN$; В) $NPMQ$;

Б) $QMNP$; Г) $QNPM$.

2. Какие углы могут быть в четырехугольнике?

А) Четыре тупых угла;

Б) четыре острых угла;

В) два тупых и два прямых угла;

Г) два прямых угла, один острый угол и один тупой угол.

3. В четырехугольнике каждая сторона равна одной и той же его диагонали. Чему равны углы четырехугольника?

А) 60°, 60°, 120°, 120°;

Б) 60°, 120°, 90°, 90°;

В) 90°, 90°, 90°, 90°;

Г) 150°, 30°, 150°, 30°.

4. Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону пополам. Чему равны стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см?

А) 5 см, 10 см; В) 7 см, 8 см;

Б) 6 см, 4 см; Г) 3 см, 12 см.

5. Четырехугольник является параллелограммом, если:

А) у него имеются две пары равных сторон;

Б) у него имеются две пары равных углов;

В) каждая диагональ делит его на два равных треугольника;

Г) у него три стороны равны.

6. Какое из данных утверждений неверно?

А) Четырехугольник, который одновременно является и ромбом, и прямоугольником, — квадрат;

Б) параллелограмм, у которого диагонали равны и перпендикулярны, — квадрат;

В) параллелограмм, у которого все углы прямые и диагонали равны, — квадрат;

Г) ромб, у которого диагонали равны, — квадрат.

7. В треугольнике ABC точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и BC. Отрезок MN является средней линией, если:

А) $MN \parallel AC$;

Б) $MN = \frac{1}{2}AC$;

В) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BAC$;

Г) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BCA$.

8. Каким из приведенных свойств не может обладать трапеция?

А) Противолежащие углы равны;

Б) диагонали равны и перпендикулярны;

В) один из углов при большем основании больше одного из углов при меньшем основании;

Г) средняя линия трапеции равна ее высоте.

9. Вписанные углы одной окружности равны, если они:

А) опираются на одну хорду;

Б) имеют общую вершину;

В) опираются на одну дугу;

Г) имеют общую сторону.

10. Около четырехугольника $CDEF$ описана окружность, $\angle CDF = 80°$, $\angle DEC = 30°$. Чему равен угол DCF?

А) 50°; В) 70°;

Б) 110°; Г) 90°.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

Сумма углов четырехугольника

Сумма углов четырехугольника равна 360°.

Параллелограмм

Параллелограммом называют четырехугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

Свойства параллелограмма

- Противолежащие стороны параллелограмма равны.
- Противолежащие углы параллелограмма равны.
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Высота параллелограмма

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Признаки параллелограмма

- Если в четырехугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- Если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Прямоугольник

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

Особое свойство прямоугольника

Диагонали прямоугольника равны.

Признаки прямоугольника

- Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.
- Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб

Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

Особое свойство ромба

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Признаки ромба

- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Квадрат

Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Трапеция

Трапецией называют четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Высота трапеции

Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Свойство средней линии трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине их суммы.

Центральный угол окружности

Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

Вписанный угол окружности

Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность.

Градусная мера вписанного угла окружности

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Свойства вписанных углов

- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой.

Окружность, описанная около четырехугольника

Окружность называют описанной около четырехугольника, если она проходит через все его вершины.

Свойство четырехугольника, вписанного в окружность

Если четырехугольник является вписанным в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

Признак четырехугольника, около которого можно описать окружность

Если в четырехугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

Окружность, вписанная в четырехугольник

Окружность называют вписанной в четырехугольник, если она касается всех его сторон.

Свойство окружности, описанной около четырехугольника

Если четырехугольник является описанным около окружности, то суммы его противолежащих сторон равны.

Признак четырехугольника, в который можно вписать окружность

Если в выпуклом четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ §2

Изучив материал этого параграфа, вы узнаете о свойствах отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла.

Вы научитесь находить среди треугольников те, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры.

Вы узнаете, какие треугольники называют подобными, и научитесь применять их свойства.

Вы ознакомитесь со свойством пересекающихся хорд и свойством касательной и секущей, проведенных к окружности через одну точку.

11. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

Теорема 11.1 (теорема Фалеса). ***Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.***

Доказательство. Пусть дан угол AOB (рис. 112). Известно, что $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, … . Докажем, что $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots$.

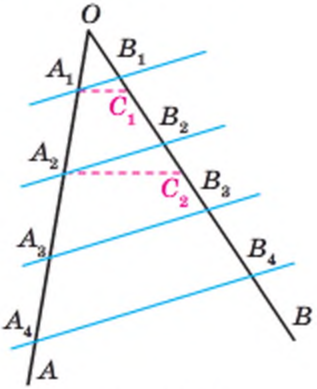


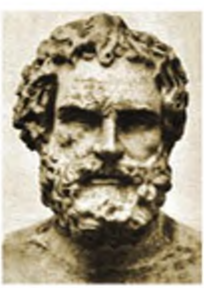
Рис. 112

Предположим, что $OB_1 \neq B_1B_2$. Пусть серединой отрезка OB_2 является некоторая точка C_1. Тогда отрезок A_1C_1 — средняя линия треугольника A_2OB_2. Отсюда $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Значит, через точку A_1 проходят две прямые, параллельные прямой A_2B_2, что противоречит аксиоме параллельности прямых. Мы получили противоречие. Следовательно, $OB_1 = B_1B_2$.

Предположим, что $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Пусть серединой отрезка B_1B_3 является некоторая точка C_2. Тогда отрезок A_2C_2 — средняя линия трапеции $A_3A_1B_1B_3$. Отсюда $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Значит, через точку A_2 проходят две прямые, параллельные прямой A_3B_3. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д. ▲

Определение. Отношением двух отрезков называют отношение их длин, выраженных в одних и тех же единицах измерения.



Фале́с Милетский

(ок. 625 — ок. 547 до н. э.)

Древнегреческий философ, ученый, купец и государственный деятель. Родом из Милета — порта в Малой Азии на побережье Эгейского моря.

Если, например, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то отношение отрезка AB к отрезку CD равно $\frac{8}{6}$. Записывают: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, то есть $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то говорят, что отрезки AB и CD **пропорциональны** соответственно отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Аналогично можно говорить о пропорциональности большего количества отрезков. Например, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то говорят, что отрезки AB, CD, MN пропорциональны соответственно отрезкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

Теорема 11.2 (теорема о пропорциональных отрезках). ***Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.***

Доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса геометрии. Мы приведем доказательство для частного случая.

Пусть стороны угла MON пересечены параллельными прямыми AA_1 и BB_1 (рис. 113). Докажем, что:

1) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

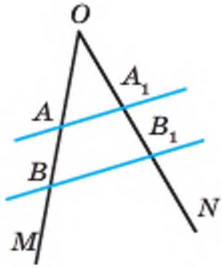


Рис. 113

Докажем первое из этих равенств (остальные два можно доказать аналогично).

Пусть для отрезков OA и AB существует такой отрезок длиной l, который укладывается целое число раз в каждом из них. Имеем: $OA = ml$, $AB = nl$, где m и n — некоторые натуральные числа.

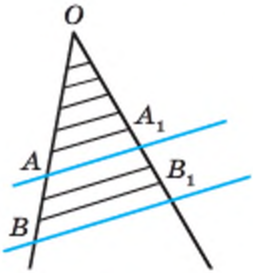


Рис. 114

Тогда отрезки OA и AB можно разделить соответственно на m и n равных отрезков, каждый из которых равен l.

Через концы полученных отрезков проведем прямые, параллельные прямой BB_1 (рис. 114). По теореме Фалеса эти прямые делят отрезки OA_1 и A_1B_1 соответственно на m и n равных отрезков. Пусть каждый из этих отрезков равен l_1. Отсюда $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

Имеем: $\frac{OA}{AB}=\frac{ml}{nl}=\frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1}=\frac{ml_1}{nl_1}=\frac{m}{n}$. Отсюда $\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}$. Тогда $\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$.

Почему же приведенные рассуждения нельзя считать полным доказательством теоремы? Дело в том, что не для любых двух отрезков существует отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз. В частности, для отрезков OA и AB такой отрезок может и не существовать. Доказательство для этого случая выходит за пределы рассматриваемого курса. ▲

Если рисунок 113 дополнить прямой CC_1, параллельной прямой BB_1 (рис. 115), то, рассуждая аналогично, получим, например, что $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$.

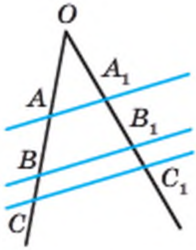


Рис. 115

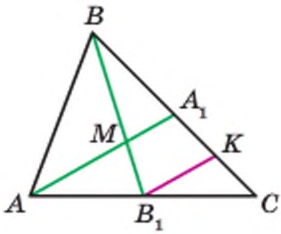


Рис. 116

Теорема 11.2 остается справедливой, если вместо сторон угла взять две любые прямые.

Теорема 11.3. ***Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.***

Доказательство. На рисунке 116 медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку M и $\frac{BM}{MB_1}=\frac{AM}{MA_1}=\frac{CM}{MC_1}=\frac{2}{1}$.

Проведем $B_1K \parallel AA_1$. Поскольку $AB_1 = B_1C$, то по теореме Фалеса $A_1K = KC$, то есть $\frac{A_1C}{A_1K}=\frac{2}{1}$. Поскольку $BA_1 = A_1C$, то $\frac{BA_1}{A_1K}=\frac{2}{1}$.

По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{MB_1}=\frac{BA_1}{A_1K}=\frac{2}{1}$.

Таким образом, медиана AA_1, пересекая медиану BB_1, делит ее в отношении 2 : 1, считая от вершины B.

Аналогично можно доказать (сделайте это самостоятельно), что медиана CC_1 также делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины B (рис. 117).

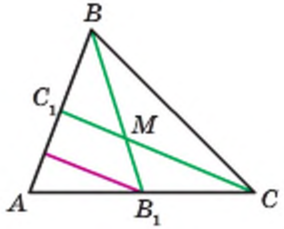


Рис. 117

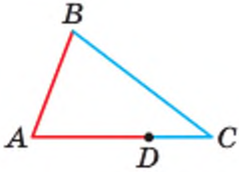


Рис. 118

А это означает, что все три медианы треугольника ABC проходят через одну точку. Мы доказали, что эта точка делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1. Аналогично можно доказать, что эта точка делит в отношении 2 : 1 также медианы AA_1 и CC_1. ▲

На рисунке 118 изображен треугольник ABC. Точка D принадлежит стороне AC. В этом случае говорят, что стороны AB и BC **прилежат** соответственно к отрезкам AD и DC.

Теорема 11.4 (свойство биссектрисы треугольника). ***Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.***

Доказательство. На рисунке 119 отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$.

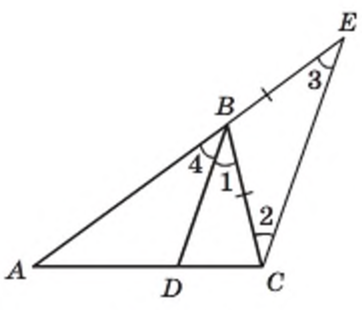


Рис. 119

Через точку C проведем прямую CE, параллельную прямой BD. Пусть проведенная прямая пересекает прямую AB в точке E. Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BD и CE и секущей BC; углы 3 и 4 равны как соответственные при параллельных прямых BD и CE и секущей AE. Поскольку BD — биссектриса треугольника ABC, то $\angle 4 = \angle 1$. Отсюда $\angle 2 = \angle 3$. Тогда треугольник CBE — равнобедренный с равными сторонами BC и BE. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BE}$. Поскольку $BE = BC$, то $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$. ▲

Задача. Разделите данный отрезок на три равных отрезка.

Решение. Через конец A данного отрезка AB проведем луч AC, не принадлежащий прямой AB (рис. 120). Отметим на луче AC произвольную точку A_1. Затем отметим точки A_2 и A_3 так, чтобы $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Проведем отрезок A_3B. Через точки A_1 и A_2 проведем прямые, параллельные прямой A_3B. Они пересекут отрезок AB в точках B_1 и B_2 соответственно. По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ●

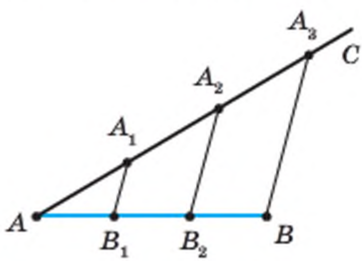


Рис. 120

1. Сформулируйте теорему Фалеса.
2. Что называют отношением двух отрезков?
3. В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?
4. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.
5. Сформулируйте теорему о пересечении медиан треугольника.
6. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

368.° Начертите произвольный отрезок и разделите его на пять равных частей.

369.° Начертите произвольный отрезок и разделите его на семь равных частей.

370.° Начертите произвольный отрезок AB и постройте на нем точку C такую, что $AC : CB = 2 : 7$.

371.° Начертите произвольный отрезок CD и постройте на нем точку E такую, что $CE : ED = 1 : 5$.

УПРАЖНЕНИЯ

372.° На рисунке 121 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ см. Найдите отрезки B_1B_2, OB_3, B_1B_4.

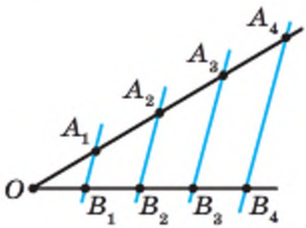


Рис. 121

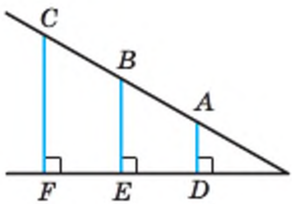


Рис. 122

373.° На рисунке 122 $AB = BC$, $EF = 5$ см. Найдите отрезок ED.

374.° Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины соответственно равны 12 см и 18 см. Изменится ли это отношение, если длины данных отрезков выразить в дециметрах? в миллиметрах?

375.° Пропорциональны ли отрезки AB и CD соответственно отрезкам EF и MK, если:

1) $AB = 16$ см, $CD = 6$ см, $EF = 24$ см, $MK = 9$ см;

2) $AB = 8$ см, $CD = 20$ см, $EF = 10$ см, $MK = 35$ см?

376.° Среди отрезков AB, CD, EF, MK, PS выберите четыре отрезка так, чтобы два из них были пропорциональны двум другим отрезкам, если $AB = 3$ см, $CD = 16$ см, $EF = 18$ см, $MK = 36$ см, $PS = 6$ см.

377.° На рисунке 123 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Найдите отрезок DE.

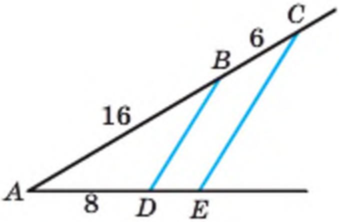


Рис. 123

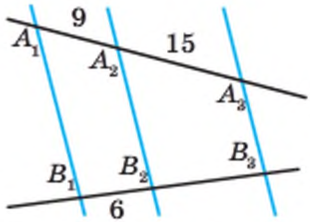


Рис. 124

378.° На рисунке 124 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Найдите отрезок B_2B_3.

379.° На рисунке 125 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, отрезок BD в два раза больше отрезка AD. Найдите отрезок BC.

380.° Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону AC — в точке K, $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Найдите отрезок AK.

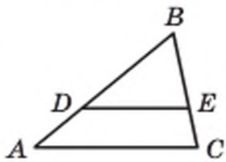


Рис. 125

381.° Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину B с произвольной точкой стороны AC.

382.° Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до его большей стороны равно 7 см. Найдите длину меньшей стороны прямоугольника.

383.° Высота равностороннего треугольника равна 12 см. На каком расстоянии от сторон треугольника расположена точка пересечения его биссектрис?

384.° Медиана CD треугольника ABC равна 9 см. Найдите отрезки CO и OD, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

385.° Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC, $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Найдите сторону BC.

386.° Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC, $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Найдите сторону BC.

387.• Концы отрезка, не пересекающего данную прямую, удалены от этой прямой на 8 см и 14 см. Найдите расстояние от середины этого отрезка до данной прямой.

388.° Расстояние от середины хорды BC до диаметра AC равно 3 см, $\angle BAC = 30°$. Найдите хорду AB.

389.° Отрезок BM — высота ромба $ABCD$, проведенная к стороне AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до стороны AD.

390.° В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 8$ см, AD — медиана, BE — высота, $BE = 12$ см. Из точки D опущен перпендикуляр DF на сторону AC. Найдите отрезок DF и угол ADF.

391.° Сторона AC треугольника ABC равна 24 см. Сторону AB разделили на четыре равных отрезка и через точки деления провели прямые, параллельные стороне AC. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие треугольнику.

392.° Основания трапеции равны 16 см и 28 см. Одну из боковых сторон разделили на три равных отрезка и через точки деления провели прямые, параллельные основаниям. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие трапеции.

393.° Сторону DE треугольника DEF разделили на три равных отрезка и через точки деления провели прямые, параллельные стороне DF. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие треугольнику DEF, если $DF = 15$ см.

394.° Докажите, что средняя линия трапеции делит ее диагонали пополам.

395.° Средняя линия MK трапеции $ABCD$ пересекает диагональ AC в точке E, $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Найдите основания трапеции.

396.° Диагонали трапеции пересекают ее среднюю линию MK в точках E и F. Докажите, что $ME = KF$.

397.° Основания трапеции равны 12 см и 22 см. Найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят ее среднюю линию.

398.° На рисунке 126 $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $CD = 35$ см, $EK = 48$ см. Найдите отрезки EF, FM и MK.

399.° Через точку D, отмеченную на стороне AC треугольника ABC, проведена прямая, которая параллельна стороне AB и пересекает сторону BC в точке E. Найдите отрезок BE, если $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ см.

400.° Точки M и K — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых BK и DM принадлежит диагонали AC.

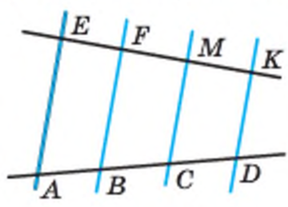


Рис. 126

401.• Докажите, что если две медианы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

402.• В треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены медиана AM и высота BH. Найдите высоту BH, если $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

403.• Даны отрезок AB и точка O, не принадлежащая прямой AB. Постройте треугольник, для которого отрезок AB является стороной, а точка O — точкой пересечения медиан.

404.• Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AD и CD.

405.• В треугольник ABC вписан ромб $CDEF$ так, что угол C у них общий, а вершины D, E и F ромба принадлежат соответственно сторонам AC, AB и BC треугольника. Найдите стороны AC и BC, если $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр треугольника равен 105 см.

406.• Стороны треугольника равны 39 см, 65 см и 80 см. Окружность, центр которой принадлежит большей стороне треугольника, касается двух других его сторон. На какие отрезки центр этой окружности делит сторону треугольника?

407.• Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На стороне AB отметили точку M так, что $AM : MB = 2 : 7$. В каком отношении прямая BD делит отрезок CM?

408.• В равнобедренном треугольнике DEF провели высоту EC к его основанию и на боковой стороне EF отметили точку A. Отрезки EC и DA пересекаются в точке O, причем $AO : OD = 3 : 8$. Найдите отношение $EA : AF$.

409.• В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 42 см, а основание относится к боковой стороне как $6 : 11$. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

410.• Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 60 см, а центр вписанной окружности делит медиану, проведенную к основанию, в отношении $12 : 5$. Найдите основание треугольника.

411.•• На стороне BC треугольника ABC отметили точку M так, что $BM : MC = 3 : 10$. В каком отношении отрезок AM делит медиану BK треугольника ABC?

412.•• На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MB = 4 : 3$. В каком отношении медиана BK: 1) делит отрезок CM; 2) делится отрезком CM?

413.•• Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен половине их разности.

414.•• Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок x такой, что $a : x = b : c$.

415.•• Через точку O, принадлежащую данному углу, проведите отрезок, концы которого принадлежат сторонам данного угла и который делится точкой O: 1) пополам; 2) в отношении $2 : 3$.

416.•• Постройте треугольник:

1) по стороне и углам, которые эта сторона образует с медианами, проведенными к двум другим сторонам;
2) по двум медианам и углу между ними;
3) по высоте и медиане, проведенным к одной стороне, и углу между этой стороной и медианой, проведенной к другой стороне;
4) по трем медианам.

417.•• Постройте треугольник:

1) по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам;
2) по высоте, проведенной к одной из сторон, и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

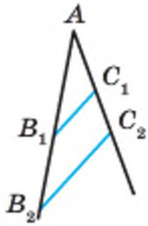


Рис. 127

418.•• На сторонах угла A отметили точки B_1, B_2, C_1, C_2 так, что $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис. 127). Докажите, что $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

419.* Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC пересекает луч AC в точке D. Докажите, что $AB : BC = AD : CD$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

420. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. На дуге AC окружности с центром B, радиус которой равен a, отметили точку E такую, что $\angle BEC = 75°$. Найдите отрезок AE.

421. Диагональ трапеции перпендикулярна ее основаниям, тупой угол, прилежащий к большему основанию, равен 120°, боковая сторона, прилежащая к этому углу, — 12 см, а большее основание — 16 см. Найдите среднюю линию трапеции.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

422. Равносторонний треугольник покрыт пятью меньшими равными между собой равносторонними треугольниками. Докажите, что для покрытия достаточно и четырех таких треугольников.

12. Подобные треугольники

На рисунке 128 вы видите уменьшенное изображение обложки учебника по геометрии. Вообще в повседневной жизни часто встречаются объекты, имеющие одинаковую форму, но разные размеры (рис. 129).

Рис. 128

Рис. 129

Геометрические фигуры, которые имеют одинаковую форму, называют **подобными**. Например, подобными являются любые две окружности, два квадрата, два равносторонних треугольника (рис. 130).

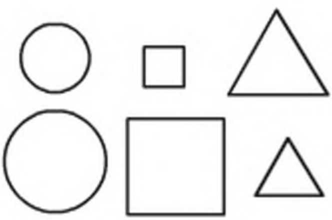


Рис. 130

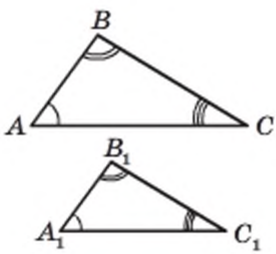


Рис. 131

На рисунке 131 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны AB и A_1B_1 лежат против равных углов C и C_1. Такие стороны называют **соответственными**. Соответственными также являются стороны BC и B_1C_1, CA и C_1A_1.

Определение. Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

Например, на рисунке 132 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. По определению эти треугольники подобны. Пишут: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (читают: «треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$»).

Число 2, которому равно отношение соответственных сторон, называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным 2. Пишут: $\Delta ABC \overset{2}{\backsim} \Delta A_1B_1C_1$.

Поскольку $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можно также сказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Пишут: $\Delta A_1B_1C_1 \overset{1/2}{\backsim} \Delta ABC$.

Из определения равных треугольников следует, что любые два равных треугольника подобны с коэффициентом подобия, равным 1.

Если $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$. Докажите это свойство самостоятельно.

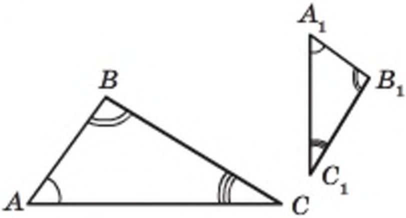


Рис. 132

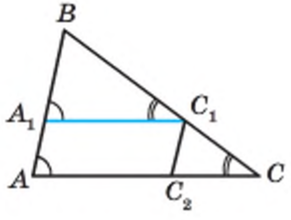


Рис. 133

Лемма[1] о подобных треугольниках. ***Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.***

---

[1] **Леммой** называют вспомогательную теорему, которую используют для доказательства других теорем.

Доказательство. На рисунке 133 изображен треугольник ABC, отрезок A_1C_1 параллелен стороне AC. Докажем, что $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

Углы A и A_1, C и C_1 равны как соответственные при параллельных прямых A_1C_1 и AC и секущих AB и CB соответственно. Следовательно, углы рассматриваемых треугольников соответственно равны.

Покажем, что стороны BA и BC пропорциональны соответственно сторонам BA_1 и BC_1.

Из теоремы о пропорциональных отрезках (теорема 11.2) следует, что $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Отсюда $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведем $C_1C_2 \parallel AB$. Получаем: $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. По определению четырехугольник $AA_1C_1C_2$ — параллелограмм. Тогда $AC_2 = A_1C_1$. Отсюда $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким образом, мы доказали, что $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Следовательно, в треугольниках A_1BC_1 и ABC углы соответственно равны и соответственные стороны пропорциональны. Поэтому по определению эти треугольники подобны. ▲

Задача. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Решение. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k. Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, откуда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Пусть P_1 — периметр треугольника $A_1B_1C_1$, P — периметр треугольника ABC. Имеем:

$$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC = k(AB + BC + AC) = kP,$$

то есть $\frac{P_1}{P} = k$. ●

1. Какие два треугольника называют подобными?
2. Чему равен коэффициент подобия двух подобных треугольников?
3. Сформулируйте лемму о подобных треугольниках.

УПРАЖНЕНИЯ

423.° На рисунке 134 изображены подобные треугольники ABC и DEF, равные углы которых отметили одинаковым количеством дуг. Какие стороны этих треугольников пропорциональны? Запишите соответствующие равенства.

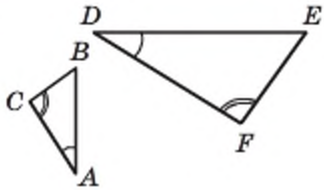


Рис. 134

424.° Подобны ли треугольники ABC и MNK, если $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2{,}4$ см, $BC = 2{,}1$ см, $AC = 3{,}9$ см, $MN = 3{,}2$ см, $NK = 2{,}8$ см, $MK = 5{,}2$ см?

425.° Известно, что $\Delta DEF \overset{0,3}{\sim} \Delta MCP$, причем стороне DE соответствует сторона MC, стороне DF — сторона MP, $MC = 12$ см, $MP = 8$ см, $EF = 4{,}5$ см. Найдите неизвестные стороны данных треугольников.

426.° Известно, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Найдите стороны B_1C_1 и A_1C_1.

427.° Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, причем стороне AB соответствует сторона A_1B_1, стороне BC — сторона B_1C_1, $\angle A = 25°$, $\angle B = 70°$.

428.° Стороны MK и DE, KT и EF — соответственные стороны подобных треугольников MKT и DEF, $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Найдите стороны треугольника DEF.

429.° На рисунке 135 $AB \parallel CD$. Найдите на этом рисунке подобные треугольники. Запишите пропорции, начинающиеся с отношения:

1) $\dfrac{AE}{CE}$; 2) $\dfrac{CD}{AB}$; 3) $\dfrac{AB}{AE}$.

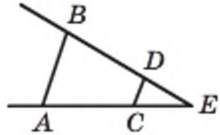


Рис. 135

430.° Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E. Найдите:
1) отрезок BD, если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см;
2) отрезок AD, если $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

431.° В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$ см. Через точку M стороны AB проведена прямая, которая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке K. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC, если $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

432.° Найдите высоту вышки (рис. 136), если расстояния от наблюдателя до шеста и до вышки соответственно равны 1,5 м и 39 м, высота шеста — 3 м, а рост наблюдателя — 1,8 м.

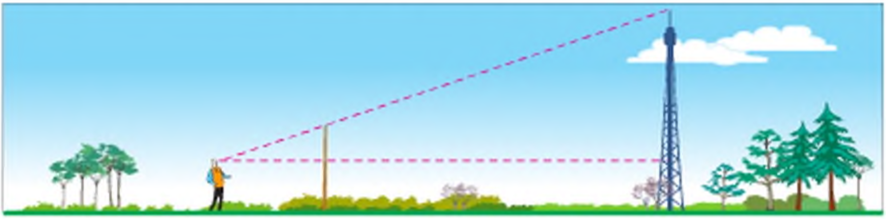


Рис. 136

433.° Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите отрезок CE, если $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

434.° Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание AD равно 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

435.° Пользуясь определением подобных треугольников, докажите, что любые два равносторонних треугольника подобны.

436.• Точки M и K — середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$ соответственно. Пользуясь определением подобных треугольников, докажите, что $\Delta MDK \backsim \Delta BCD$.

437.• Стороны треугольника относятся как $5 : 4 : 7$. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: 1) периметр равен 64 см; 2) меньшая сторона равна 24 см.

438.• Стороны данного треугольника равны 15 см, 25 см и 35 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: 1) периметр равен 45 см; 2) разность наибольшей и наименьшей сторон составляет 16 см.

439.• На рисунке 137 изображены треугольник ABC и вписанный в него ромб $BDEK$. Найдите сторону ромба, если $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

440.• На рисунке 138 изображены прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$) и вписанный в него квадрат $BMKN$. Найдите отрезок CN, если $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

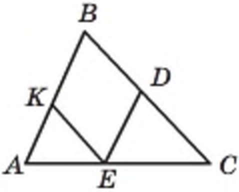


Рис. 137

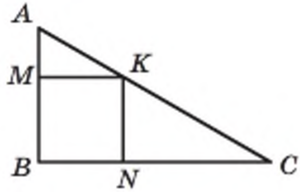


Рис. 138

441.• Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 8 см и 12 см соответственно имеют только одну общую точку A (точка A лежит между точками O_1 и O_2). Их общая внешняя касательная пересекает прямую O_1O_2 в точке B. Найдите расстояния от точки B до центров данных окружностей.

442.•• Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Через середину высоты треугольника, опущенной на его основание, проведена прямая, параллельная боковой стороне. Найдите периметр треугольника, который эта прямая отсекает от данного.

443.•• В равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона — 18 см, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружности с боковыми сторонами треугольника.

444.• В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$, BD — биссектриса. Найдите отрезок BD.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

445. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ в 2 раза больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B параллелограмма пересекают прямую CD в точках M и K соответственно (рис. 139). Найдите стороны параллелограмма, если $MK = 18$ см.

446. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, угол AOD на 60° больше угла AOB, $AC = 24$ см. Найдите периметр треугольника COD.

447. Окружность, центр которой принадлежит стороне AB треугольника ABC, проходит через точку B, касается стороны AC в точке C и пересекает сторону AB в точке D, причем $AD : BD = 1 : 2$. Найдите углы: 1) треугольника ABC; 2) треугольника BCD.

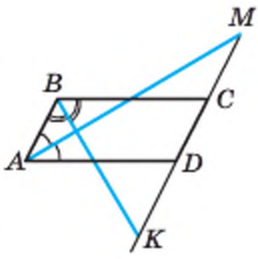


Рис. 139

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

448. На плоскости отметили 25 точек так, что среди любых трех из них найдутся две точки, расстояние между которыми меньше единицы. Докажите, что существует окружность единичного радиуса, которая содержит не менее 13 данных точек.

13. Первый признак подобия треугольников

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются условия $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то по определению эти треугольники подобны.

Можно ли по меньшему количеству условий определять подобие треугольников? На этот вопрос отвечают признаки подобия треугольников.

Теорема 13.1 (первый признак подобия треугольников: по двум углам). ***Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $AB > A_1B_1$. Отложим на стороне BA отрезок BA_2, равный стороне B_1A_1. Через точку A_2 проведем прямую A_2C_2, параллельную стороне AC (рис. 140).

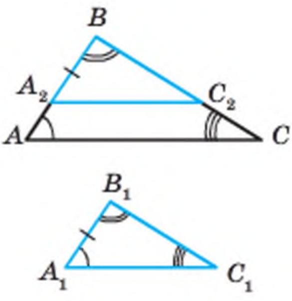


Рис. 140

Углы A и BA_2C_2 — соответственные при параллельных прямых A_2C_2 и AC и секущей AA_2. Отсюда $\angle A = \angle BA_2C_2$. Але $\angle A = \angle A_1$. Получаем, что $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Таким образом, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. По лемме о подобных треугольниках $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$. Следовательно, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Задача 1. Средняя линия трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 24 см, а ее диагонали пересекаются в точке O. Найдите основания трапеции, если $AO : OC = 5 : 3$.

Решение. Рассмотрим треугольники AOD и COB (рис. 141). Углы AOD и BOC равны как вертикальные, углы CAD и ACB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, треугольники AOD и COB подобны по двум углам.

Тогда $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

Пусть $BC = 3x$ см, тогда $AD = 5x$ см.

Поскольку средняя линия трапеции равна 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Имеем: $3x + 5x = 48$. Отсюда $x = 6$.

Следовательно, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Ответ: 18 см, 30 см.

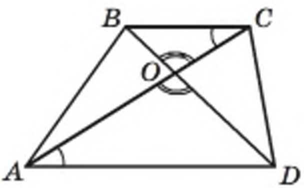


Рис. 141

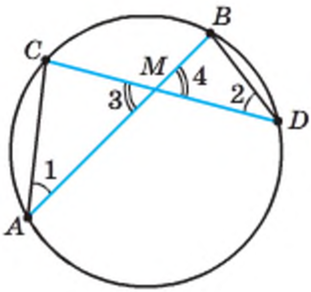


Рис. 142

Задача 2 (свойство пересекающихся хорд). Докажите, что если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 142).

Решение. Рассмотрим треугольники ACM и DBM. Углы 3 и 4 равны как вертикальные, углы 1 и 2 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ACM и DBM подобны по первому признаку подобия треугольников. Тогда $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$.

Отсюда $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Задача 3 (свойство касательной и секущей). Докажите, что если через точку A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и прямая (секущая), пересекающая окружность в точках B и C (рис. 143), то $AM^2 = AC \cdot AB$.

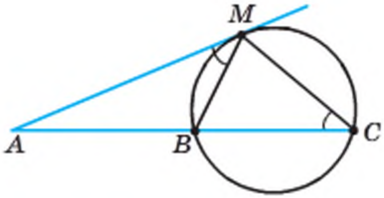


Рис. 143

Решение. Рассмотрим треугольники AMB и ACM. У них угол A общий. По свойству угла между касательной и хордой (см. ключевую задачу 1 п. 9) $\angle AMB = \frac{1}{2}\cup MB$. Угол MCB — вписанный угол, опирающийся на дугу MB, поэтому $\angle MCB = \frac{1}{2}\cup MB$. Отсюда $\angle AMB = \angle MCB$. Следовательно, треугольники AMB и ACM подобны по первому признаку подобия треугольников. Тогда $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Отсюда $AM^2 = AC \cdot AB$.

1. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте свойство пересекающихся хорд.
3. Сформулируйте свойство касательной и секущей, проведенных к окружности через одну точку.

УПРАЖНЕНИЯ

449.° На рисунке 144 $\angle BAC = \angle BED$. Подобны ли треугольники ABC и EDB? В случае утвердительного ответа укажите пары соответственных сторон.

450.° На рисунке 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите все пары подобных треугольников, изображенных на этом рисунке.

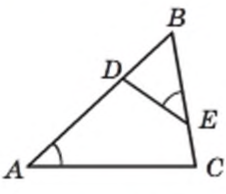


Рис. 144

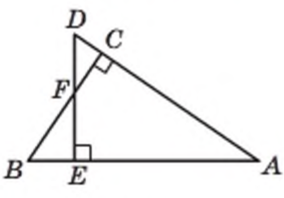


Рис. 145

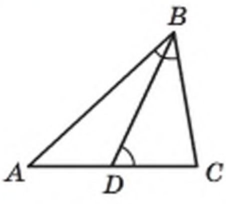


Рис. 146

451.° На рисунке 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

452.° Укажите пары подобных треугольников, изображенных на рисунке 147, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

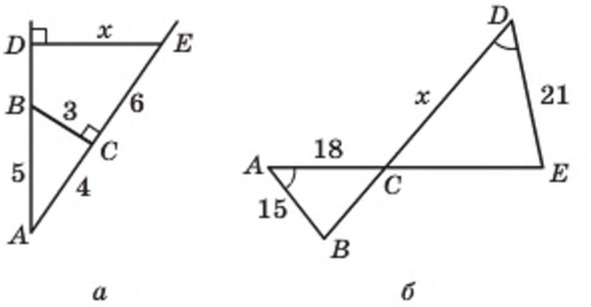


Рис. 147

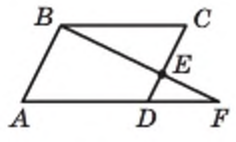


Рис. 148

453.° В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Найдите неизвестные стороны данных треугольников.

454.° На стороне CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 148) отметили точку E, прямые BE и AD пересекаются в точке F, $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Найдите отрезки EF и FD.

455.° В трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ известно, что $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 16$ см. Найдите отрезок OC.

456.° Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Найдите основание AD, если $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см.

457.° Подобны ли два прямоугольных треугольника, если среди углов одного из них есть угол, равный 38°, а среди углов другого — угол, равный 52°?

458.° Докажите, что два равнобедренных треугольника подобны, если углы, противолежащие их основаниям, равны.

459.° Можно ли утверждать, что два равнобедренных треугольника подобны, если у них есть: 1) по равному острому углу; 2) по прямому углу; 3) по равному тупому углу?

460.° Угол между боковой стороной и основанием одного равнобедренного треугольника равен углу между боковой стороной и основанием другого равнобедренного треугольника. Боковая сторона и основание первого треугольника равны 18 см и 10 см соответственно, а основание второго равно 8 см. Найдите боковую сторону второго треугольника.

461.° Из вершины прямого угла треугольника опущена высота на гипотенузу. Сколько подобных треугольников образовалось при этом?

462.° Стороны параллелограмма равны 20 см и 14 см, высота, проведенная к большей стороне, равна 7 см. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к меньшей стороне.

463.• В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AO и OC.

464.• В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Найдите отрезки, на которые точка пересечения диагоналей делит диагональ AC.

465.• Докажите, что в подобных треугольниках биссектрисы, проведенные из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

466.• Докажите, что в подобных треугольниках высоты, проведенные из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

467.• Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 см и 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите диагональ AC.

468.• На стороне AC треугольника ABC отметили точку D такую, что $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABD.

469.• Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а больший катет — 16 см. Найдите отрезки, на которые серединный перпендикуляр гипотенузы делит больший катет.

470.• Объясните с помощью рисунка 149, как можно найти ширину BM реки, используя подобие треугольников.

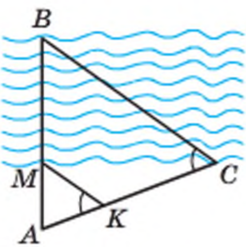


Рис. 149

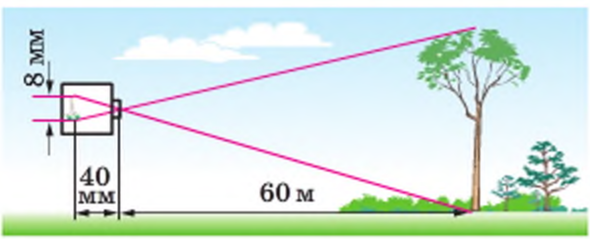


Рис. 150

471.• Дерево находится на расстоянии 60 м от объектива фотоаппарата. Высота его изображения на пленке равна 8 мм. Расстояние от объектива до пленки равно 40 мм (рис. 150). Какова высота дерева?

472.• Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м в это же время суток равна 2,4 м (рис. 151).

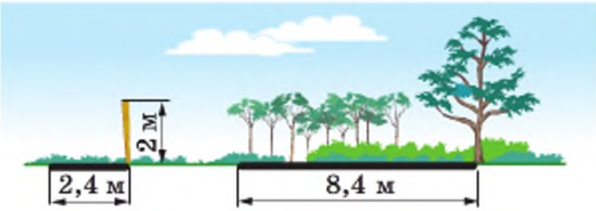


Рис. 151

473.• Может ли прямая пересекать две стороны равнобедренного треугольника, отсекать от него треугольник, ему подобный, и не быть параллельной третьей стороне?

474.• Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Найдите отрезок DM.

475.• Хорды MK и NP окружности пересекаются в точке F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а отрезок NF в 3 раза длиннее отрезка PF. Найдите длину хорды NP.

476.• Точка K делит хорду AC окружности пополам, а хорду DE — на отрезки длиной 2 см и 32 см. Найдите длину хорды AC.

477.•• Точка E делит хорду CD окружности на отрезки длиной 15 см и 16 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от точки E до центра окружности равен 4 см.

478.•• Точка P делит хорду MK окружности на два отрезка длиной 8 см и 12 см. Найдите расстояние от точки P до центра окружности, если ее радиус равен 11 см.

479.•• Через точку A проведены к окружности касательная AM (M — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках K и P (точка K лежит между точками A и P). Найдите отрезок KP, если $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

480.•• Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D (точка C лежит между точками A и D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Найдите отрезок AD.

481.•• Через точку A, лежащую вне окружности (рис. 152), проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), а другая — в точках D и E (точка D лежит между точками A и E).

1) Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Найдите отрезок AE, если $AB = 18$ см, $BC = 12$ см и $AD : DE = 5 : 7$.

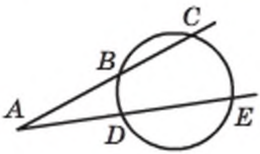


Рис. 152

482.•• В окружности, радиус которой равен 8 см, проведена хорда AB. На прямой AB вне отрезка AB отметили точку C такую, что $AC : BC = 1 : 4$. Найдите расстояние от точки C до центра окружности, если $AB = 9$ см.

483.•• В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины принадлежат стороне AC, а две другие — сторонам AB и BC соответственно. Найдите сторону квадрата, если $AC = a$, а высота, проведенная к стороне AC, равна h.

484.•• В треугольнике ABC известно, что $BC = 72$ см, AD — высота, $AD = 24$ см. В данный треугольник вписан прямоугольник $MNKP$ так, что вершины M и P принадлежат стороне BC, а вершины N и K — сторонам AB и AC соответственно. Найдите стороны прямоугольника, если $MP : MN = 9 : 5$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

485. Найдите углы параллелограмма, если угол между его высотами, проведенными из одной вершины, равен: 1) 20°; 2) 130°.

486. Две окружности с центрами O_1 и O_2, радиусы которых равны, пересекаются в точках A и B. Отрезок O_1O_2 пересекает данные окружности в точках C и D. Докажите, что четырехугольник $ACBD$ — ромб.

487. Один из углов прямоугольной трапеции равен 135°, средняя линия — 21 см, а основания относятся как 5 : 2. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

488. Как два равных выпуклых четырехугольника разрезать на части, из которых можно составить параллелограмм?

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Точки, принадлежащие одной прямой, называют **коллинеарными.** Две точки коллинеарны всегда.

В этом рассказе вы узнаете об одной знаменитой теореме, которая служит критерием коллинеарности трех точек. Эта теорема носит имя древнегреческого математика и астронома Менелая Александрийского (I–II вв. н. э.).

Теорема Менелая. ***На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC — точку B_1. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство***

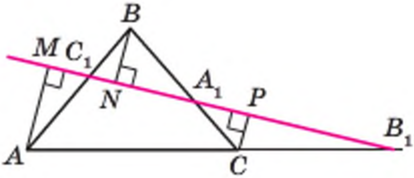
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доказательство. Сначала докажем необходимое условие коллинеарности: если точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, то выполняется равенство (*).

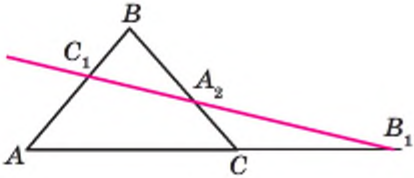
Из вершин треугольника ABC опустим перпендикуляры AM, BN и CP на прямую C_1B_1 (рис. 153, *а*). Поскольку $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то треугольники AMC_1 и BNC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$.

Из подобия треугольников BNA_1 и CPA_1 получаем: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$.

Из подобия треугольников B_1CP и B_1AM следует равенство $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$. Перемножив почленно левые и правые части пропорций



а



б

Рис. 153

$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$, получаем равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=$ $=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1.$

Теперь докажем достаточное условие коллинеарности: если выполняется равенство (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Пусть прямая C_1B_1 пересекает сторону BC треугольника ABC в некоторой точке A_2 (рис. 153, *б*). Поскольку точки C_1, A_2, B_1 лежат на одной прямой, то из доказанного выше можно записать: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$ Сопоставляя это равенство с равенством (*), приходим к выводу, что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_2}{A_2C}$, то есть точки A_2 и A_1 делят отрезок BC в одном и том же отношении, а значит, эти точки совпадают. Отсюда следует, что прямая C_1B_1 пересекает сторону BC в точке A_1. ▲

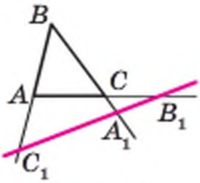


Рис. 154

Заметим, что теорема остается справедливой и тогда, когда точки A_1, B_1, C_1 лежат не на сторонах треугольника ABC, а на их продолжениях (рис. 154).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Общие касательные к трем окружностям пересекаются в точках A, B и C (рис. 155). Докажите, что эти точки коллинеарны.

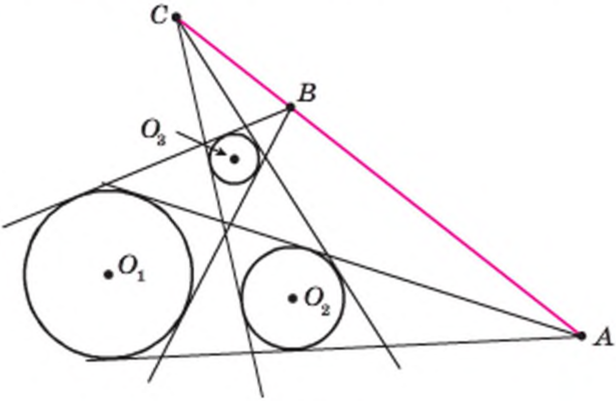


Рис. 155

Указание. Примените теорему Менелая к треугольнику $O_1O_2O_3$ и точкам A, B, C, которые лежат на продолжениях его сторон.

2. Окружность с центром O_1 касается двух окружностей с центрами O_2 и O_3 в точках B и A соответственно (рис. 156). Докажите, что точка C — точка пересечения общих касательных к окружностям с центрами O_2 и O_3 — принадлежит прямой AB.

3. В точках A, B, C проведены касательные к окружности (рис. 157). Докажите, что точки M, N и P коллинеарны.

Указание. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABC, воспользуйтесь ключевой задачей 3 п. 13.

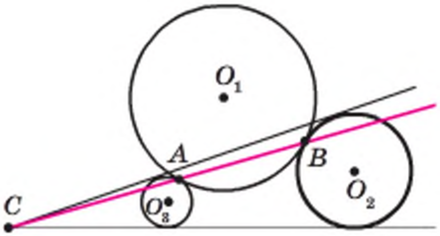


Рис. 156

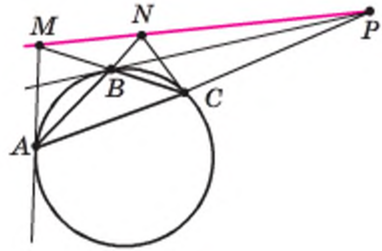


Рис. 157

4. Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC соответственно в точках D, E, F. Докажите, что середины отрезков DC, AE, BF лежат на одной прямой (эту прямую называют *прямой Гаусса*).

Указание. Примените теорему Менелая к треугольнику, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC.

Карл Фридрих Гаусс

(1777–1855)

Выдающийся немецкий математик, астроном, физик, геодезист. В его творчестве органически сочетались исследования по теоретической и прикладной математике. Работы Гаусса оказали большое влияние на дальнейшее развитие алгебры, теории чисел, геометрии, теории электричества и магнетизма.

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

Теорема Птолемея. ***Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.***

Клавдий Птолемей

(ок. 100 — ок. 178)

Древнегреческий математик и астроном. Автор геоцентрической модели мира. Разработал математическую теорию движения планет, позволяющую вычислять их положение. Создал прообраз современной системы координат.

Доказательство. На рисунке 158 изображен вписанный в окружность четырехугольник $ABCD$. Докажем, что

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC.$$

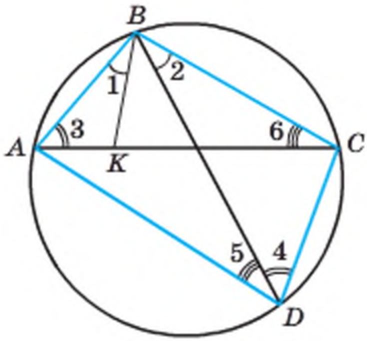


Рис. 158

На диагонали AC отметим точку K так, что $\angle 1 = \angle 2$. Углы 3 и 4 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ABK и DBC подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, то есть

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (1)$$

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle KBC$. Углы 5 и 6 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому $\Delta KBC \backsim \Delta ABD$. Отсюда $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, то есть

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получаем:

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, то есть

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD\,(AK + KC) = BD \cdot AC$. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

2. На окружности отметили точки A, B, C, D так, что $\smile AB = \smile BC = \smile CD$. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.

3. На рисунке 159 изображен вписанный в окружность семиугольник $ABCDEFG$, у которого все стороны равны. Докажите, что $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

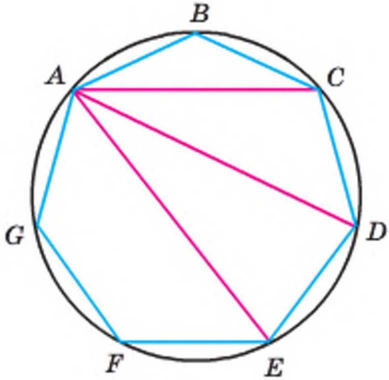


Рис. 159

14. Второй и третий признаки подобия треугольников

Теорема 14.1 (второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними). ***Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=k$ и $\angle B=\angle B_1$. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

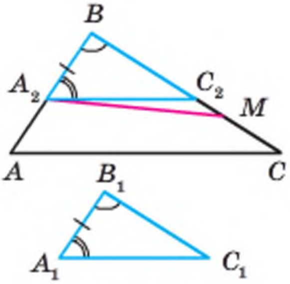


Рис. 160

Если $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, а следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому эти треугольники подобны.

Пусть, например, $k > 1$, то есть $AB > A_1B_1$ и $BC > B_1C_1$. На сторонах BA и BC отметим соответственно точки A_2 и C_2 так, что $BA_2 = A_1B_1$ и $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 160). Тогда $\frac{AB}{BA_2}=\frac{BC}{BC_2}$.

Покажем, что $A_2C_2 \parallel AC$. Предположим, что это не так. Тогда на стороне BC отметим точку M такую, что $A_2M \parallel AC$. Имеем: $\frac{AB}{BA_2}=\frac{BC}{BM}$. Но $\frac{AB}{BA_2}=\frac{BC}{BC_2}$, тогда $\frac{BC}{BC_2}=\frac{BC}{BM}$, то есть $BC_2 = BM$. Следовательно, буквами M и C_2 обозначена одна и та же точка. Тогда $A_2C_2 \parallel AC$.

По лемме о подобных треугольниках получаем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Теорема 14.2 (третий признак подобия треугольников: по трем сторонам). ***Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Если $k = 1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $k > 1$. На сторонах BA и BC отметим соответственно точки A_2 и C_2 такие, что $BA_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 161). Тогда $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. В треугольниках ABC и A_2BC_2 угол B общий, прилежащие к нему стороны пропорциональны. Следовательно, по второму признаку подобия треугольников эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия равен k. Тогда $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Учитывая, что по условию $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, получаем: $A_1C_1 = A_2C_2$. Следовательно, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. С учетом того, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$, получаем: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

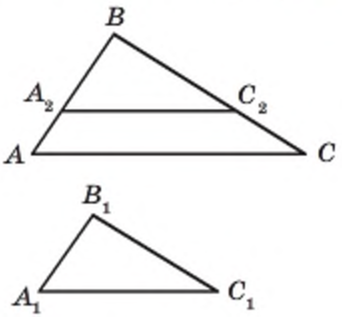


Рис. 161

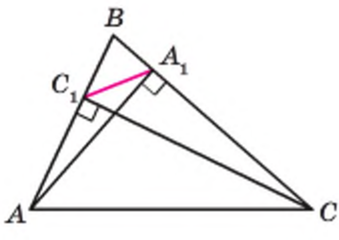


Рис. 162

Задача. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Решение. На рисунке 162 отрезки AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажем, что $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

В прямоугольных треугольниках ABA_1 и CBC_1 острый угол B общий. Следовательно, треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тогда $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Угол B — общий для треугольников ABC и A_1BC_1.

Следовательно, треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по второму признаку подобия треугольников.

1. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.

УПРАЖНЕНИЯ

489.° На одной стороне угла A отложены отрезки AB и AD, а на другой — отрезки AC и AE. Подобны ли треугольники ABC и ADE, если $AB = 4$ см, $AD = 20$ см, $AC = 10$ см, $AE = 8$ см?

490.° На сторонах AB и AC треугольника ABC (рис. 163) отметили соответственно точки D и E так, что $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Найдите отрезок DE, если $BC = 21$ см.

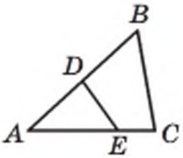


Рис. 163

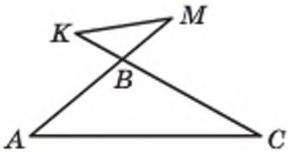


Рис. 164

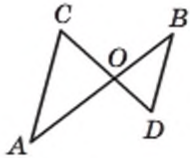


Рис. 165

491.° В треугольнике ABC известно, что $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см. На продолжениях отрезков AB и BC за точку B отложены соответственно отрезки BM и BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см (рис. 164). Найдите отрезок KM.

492.° Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 165), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Найдите угол BDO.

493.° На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Найдите отрезок MK, если $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

494.° Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;

2) $AB = 1{,}3$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3{,}2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

495.° Подобны ли два треугольника, если стороны одного относятся как $3 : 8 : 9$, а стороны другого равны 24 см, 9 см, 27 см?

496.• В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, каждая из сторон AB и AC составляет 0,6 сторон A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Найдите стороны BC и B_1C_1, если их сумма равна 48 см.

497.• В треугольниках DEF и MKN известно, что $\angle E = \angle K$, а каждая из сторон DE и EF в 2,5 раза больше сторон MK и KN соответственно. Найдите стороны DF и MN, если их разность равна 30 см.

498.• На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Найдите отрезок DE, если $BC = 16$ см.

499.• Из деревянных палочек изготовили три подобных разносторонних треугольника. В каждом из них бо́льшую сторону покрасили в синий цвет, а меньшую — в желтый. Из синих палочек составили один треугольник, а из желтых — другой. Будут ли эти треугольники подобны?

500.•• В треугольнике ABC известно, что $AC = a$, $AB = BC = b$, AM и CK — биссектрисы треугольника. Найдите отрезок MK.

501.•• В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороне AC отметили точку D так, что $CD = 9$ см. Найдите отрезок BD.

502.* Из точки A проведены два луча AM и AN, не лежащие на одной прямой. На луче AM отмечены точки H и B, а на луче AN — точки C и D так, что $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Докажите, что точки H, B, D и C лежат на одной окружности.

503.* На медиане BM треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle MKC = \angle BCM$. Докажите, что $\angle AKM = \angle BAM$.

504.* Отрезки AB и CD пересекаются в точке M. Известно, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

505.* На общей хорде двух пересекающихся окружностей отметили точку M и через нее провели хорды AB и CD (рис. 166). Докажите, что $\angle DAB = \angle BCD$.

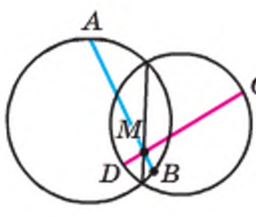


Рис. 166

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

506. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $\angle BAD = \angle ADB$. Найдите стороны параллелограмма, если периметр треугольника BCD равен 32 см.

507. На диагонали BD квадрата $ABCD$ отметили точку E так, что $DE = AD$. Через точку E проведена прямая, которая перпендикулярна прямой BD и пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что $AF = FE = BE$.

508. В трапеции $ABCD$ известно, что $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $BC = 5$ см. Найдите сторону CD, если высота трапеции, проведенная из вершины C, разбивает данную трапецию на треугольник и квадрат.

Повторите содержание пункта 7 на с. 200 и пункта 17 на с. 204.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

509. На окружности отметили 999 точек синим карандашом и одну точку красным карандашом. Каких многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше: тех, которые содержат красную точку, или тех, которые ее не содержат?

ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

Точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника — это центр окружности, описанной около треугольника. Обозначим эту точку буквой O.

Точка пересечения биссектрис треугольника — это центр вписанной окружности. Обозначим эту точку буквой J.

Точку пересечения прямых, содержащих высо́ты треугольника, называют **ортоцентром** треугольника. Обозначим эту точку буквой H.

Точку пересечения медиан треугольника называют **центроидом** треугольника. Обозначим эту точку буквой M.

Точки O, J, H, M называют **замечательными точками** треугольника. Использование такого эмоционального эпитета вполне обосновано. Ведь эти точки обладают целым рядом красивых свойств. Разве не замечательно уже хотя бы то, что они существуют в любом треугольнике?

Рассмотрим одну из многих теорем о замечательных точках треугольника.

Теорема. ***В любом треугольнике центр описанной окружности, центроид и ортоцентр лежат на одной прямой.***

Эту прямую называют **прямой Эйлера.**

Леонард Эйлер
(1707–1783)

Выдающийся математик, физик, механик, астроном.

Доказательство. Для равнобедренного треугольника доказываемое утверждение очевидно.

Если данный треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90°$), то его ортоцентр — это точка C, центр описанной окружности — середина гипотенузы AB. Тогда понятно, что все три точки, о которых идет речь в теореме, принадлежат медиане, проведенной к гипотенузе.

Докажем теорему для остроугольного разностороннего треугольника.

Лемма. ***Если H — ортоцентр треугольника ABC, OM_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O описанной окружности на сторону BC, то $AH = 2OM_1$*** (рис. 167).

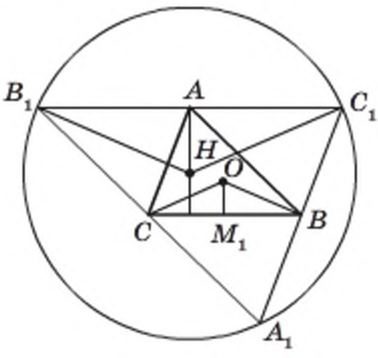


Рис. 167

Доказательство. Выполним дополнительное построение, уже знакомое вам из решения ключевой задачи пункта 2: через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 167). В указанной ключевой задаче было показано, что ортоцентр H треугольника ABC является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Для этой окружности угол B_1HC_1 является центральным, а угол $B_1A_1C_1$ — вписанным. Поскольку оба угла опираются на одну и ту же дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны как противолежащие углы параллелограмма ABA_1C, поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Поскольку $B_1C_1 = 2BC$, то равнобедренные треугольники B_1HC_1 и COB подобны с коэффициентом подобия 2. Поскольку отрезки AH и OM_1 — соответственные высоты подобных треугольников, то $AH = 2OM_1$.

Докажем теперь основную теорему.

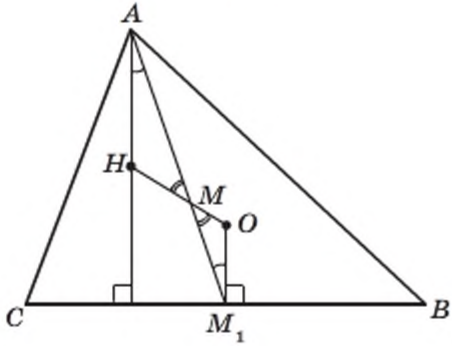


Рис. 168

Поскольку точка M_1 — середина стороны BC, то отрезок AM_1 — медиана треугольника ABC (рис. 168). Пусть M — точка пересечения отрезков AM_1 и HO. Поскольку $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Углы AMH и M_1MO равны как вертикальные. Следовательно, треугольники HAM и OM_1M подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Значит, точка M делит медиану AM_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины A. Отсюда точка M — центроид треугольника ABC.

Доказательство для случая тупоугольного треугольника аналогично. ▲

Обратим внимание на то, что мы не только установили факт принадлежности точек O, M, H одной прямой, но и доказали равенство

$$HM = 2MO,$$

которое является еще одним свойством замечательных точек треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны две точки, лежащие в одной полуплоскости относительно данной прямой. Постройте треугольник, одна из сторон которого лежит на данной прямой, а центр описанной окружности и ортоцентр являются двумя данными точками.

2. Постройте треугольник ABC по трем данным точкам: вершине A, ортоцентру H и центру O описанной окружности.

3. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника. Докажите, что $\angle A = 60°$.

Указание. Докажите, что $HA = OA$.

ЗАДАНИЕ № 2 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. На рисунке 169 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2}A_1A_3$. Отсюда следует, что:

А) $A_1A_2 = B_1B_2$; В) $A_1A_3 = B_1B_3$;
Б) $B_1B_3 = 2B_2B_3$; Г) $A_1A_2 = B_2B_3$.

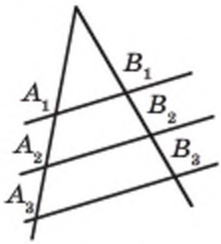


Рис. 169

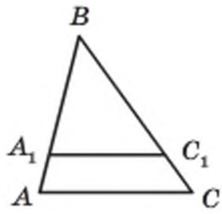


Рис. 170

2. Если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, то какое из данных равенств верно для любого треугольника ABC?

А) $AM : MB_1 = BM : MA_1$; В) $MA_1 = \frac{1}{2}AM$;

Б) $MA_1 = \frac{1}{3}MB$; Г) $MB_1 = \frac{1}{2}BB_1$.

3. На рисунке 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Тогда:

А) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$; В) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

Б) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$; Г) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 9$ см. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису BB_1, считая от вершины B?

А) 2 : 3; Б) 2 : 1; В) 4 : 3; Г) 3 : 4.

5. Через точку M стороны BC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная стороне CD. Эта прямая пересекает отрезки BD и AD в точках K и F соответственно. Известно, что $BM : FD = 2 : 1$. Чему равно отношение $KD : BK$?

А) 2 : 1; Б) 1 : 2; В) 1 : 3; Г) 4 : 1.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 14$ см, $BC = 21$ см. На стороне AB на расстоянии 4 см от вершины A отмечена точка D, через которую проведена прямая, параллельная стороне AC. Найдите отрезки, на которые эта прямая делит сторону BC.

А) 12 см, 9 см; В) 15 см, 6 см;
Б) 18 см, 3 см; Г) 14 см, 7 см.

7. Отрезок MN, проведенный через точку пересечения диагоналей неравнобокой трапеции $ABCD$, параллелен ее основаниям (рис. 171). Сколько пар подобных треугольников изображено на рисунке?

А) 4; Б) 6; В) 3; Г) 5.

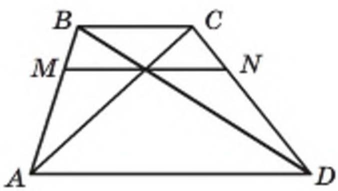


Рис. 171

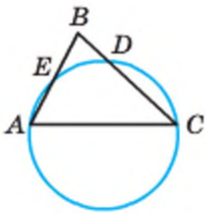


Рис. 172

8. Через вершины A и C неравнобедренного треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает стороны BA и BC в точках E и D соответственно (рис. 172). Какое из данных равенств является верным?

А) $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$; В) $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$;

Б) $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$; Г) $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{AC}$.

9. Хорда AB пересекает хорду CD в ее середине и делится этой точкой на отрезки, равные 4 см и 25 см. Найдите хорду CD.

А) 10 см; Б) 5 см; В) 100 см; Г) 20 см.

10. В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. На стороне AC отметили точку D такую, что $AD = 6$ см. Найдите отрезок BD.

А) 5 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 7 см.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 2

Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Теорема о пропорциональных отрезках

Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

Свойство медиан треугольника

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

Подобные треугольники

Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

Лемма о подобных треугольниках

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Первый признак подобия треугольников: по двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников: по трем сторонам

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ §3

В этом параграфе вы ознакомитесь со знаменитой теоремой Пифагора.

Вы научитесь по известным сторонам и углам прямоугольного треугольника находить его неизвестные стороны и углы.

15. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

На рисунке 173 отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$).

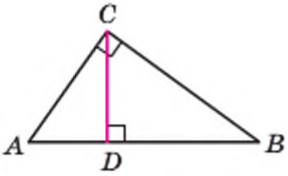


Рис. 173

Отрезки AD и DB называют **проекциями** катетов AC и CB соответственно на гипотенузу.

Лемма. ***Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.***

Докажите лемму самостоятельно.

Теорема 15.1. ***Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.***

Доказательство. На рисунке 173 отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$). Докажем, что

$$CD^2 = AD \cdot DB, \quad AC^2 = AB \cdot AD, \quad BC^2 = AB \cdot DB.$$

Поскольку $\Delta CBD \backsim \Delta ACD$, то $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Отсюда $CD^2 = AD \cdot DB$.

Поскольку $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$, то $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Отсюда $AC^2 = AB \cdot AD$.

Поскольку $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$, то $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Отсюда $BC^2 = AB \cdot DB$. ▲

Если длины отрезков на рисунке 173 обозначить так: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$, $DB = a_c$, то доказанные соотношения принимают вид:

$$\boxed{h_c^2 = a_c b_c, \; a^2 = a_c c, \; b^2 = b_c c}$$

Эти равенства называют **метрическими соотношениями в прямоугольном треугольнике.**

Пример. Даны два отрезка, длины которых равны a и b (рис. 174). Постройте третий отрезок, длина которого равна $\sqrt{ab}$.

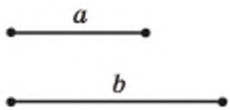


Рис. 174

Решение. Рассмотрим треугольник ADC ($\angle ADC = 90°$), в котором отрезок DB является высотой (рис. 175). Имеем: $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Если обозначить $AB = a$, $BC = b$, то $DB = \sqrt{ab}$.

Проведенный анализ показывает, как провести построение.

На произвольной прямой отметим точку A и отложим последовательно отрезки AB и BC так, чтобы $AB = a$, $BC = b$. Построим окружность с диаметром AC. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную прямой AC (рис. 175). Пусть D — одна из точек пересечения прямой и окружности.

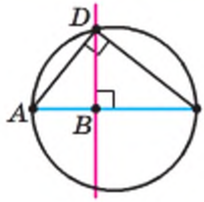


Рис. 175

Докажем, что отрезок DB искомый. Действительно, $\angle ADC = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AC. Тогда по теореме 15.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, то есть $DB = \sqrt{ab}$.

1. Какой формулой связаны высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, и проекции катетов на гипотенузу?
2. Какой формулой связаны катет, гипотенуза и проекция этого катета на гипотенузу?

УПРАЖНЕНИЯ

510.° Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки длиной 2 см и 18 см.

511.° Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а его проекция на гипотенузу — 4 см. Найдите гипотенузу.

512.° Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 5 см и 20 см. Найдите катеты треугольника.

513.° Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна 48 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу — 36 см. Найдите стороны данного треугольника.

514.• Найдите катеты прямоугольного треугольника, высота которого делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 3 см меньше этой высоты, а другой — на 4 см больше высоты.

515.$^{\bullet}$ Найдите меньший катет прямоугольного треугольника и его высоту, проведенную к гипотенузе, если больший катет меньше гипотенузы на 10 см и больше своей проекции на гипотенузу на 8 см.

516.$^{\bullet}$ Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, равен 2 см и делит эту сторону на отрезки, относящиеся как 1 : 4. Найдите диагонали ромба.

517.$^{\bullet}$ Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, делит его на два отрезка, один из которых равен 4 см. Найдите радиус окружности, если длина перпендикуляра равна 10 см.

518.$^{\bullet}$ Найдите периметр равнобокой трапеции, основания которой равны 7 см и 25 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

519.$^{\bullet\bullet}$ Центр окружности, описанной около равнобокой трапеции, принадлежит ее большему основанию. Найдите радиус этой окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а проекция диагонали на большее основание — 16 см.

520.$^{\bullet\bullet}$ Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, которая равна 12 см. Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 10 см.

521.$^{\bullet\bullet}$ Найдите высоту равнобокой трапеции, если ее диагональ перпендикулярна боковой стороне, а разность квадратов оснований равна 25.

522.$^{\bullet\bullet}$ В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найдите периметр трапеции.

523.$^{\bullet\bullet}$ В равнобокую трапецию вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 27 см. Найдите высоту трапеции.

524.$^{\bullet\bullet}$ Даны два отрезка, длины которых равны a и b. Постройте отрезок длиной $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

525. Периметр параллелограмма больше одной из сторон на 35 см и больше другой стороны на 28 см. Найдите стороны параллелограмма.

526. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки M, N, K и E так, что четырехугольник $MNKE$ является прямоугольником, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника $MNKE$, если диагональ квадрата $ABCD$ равна 7 см.

527. В окружность вписана трапеция, диагональ которой делит угол при большем основании пополам. Найдите дуги, на которые делят окружность вершины трапеции, если один из ее углов равен 74°.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

528. У вписанного в окружность многоугольника выбрали вершину и провели все диагонали, которым эта вершина принадлежит. Докажите, что среди образовавшихся треугольников не более чем один является остроугольным.

16. Теорема Пифагора

Теорема 16.1 (теорема Пифагора). ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 176 изображен прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Докажем, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

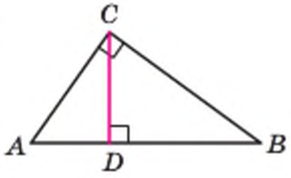


Рис. 176

Проведем высоту CD. Применив теорему 15.1 для катетов AC и BC, получаем: $AC^2 = AB \cdot AD$ и $BC^2 = AB \cdot DB$. Сложив почленно эти равенства, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB.$$

Далее имеем: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$. ▲

Если в прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b, а длина гипотенузы равна c, то теорему Пифагора можно выразить следующим равенством:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Теорема Пифагора позволяет по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону:

$$\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2};\ a=\sqrt{c^2-b^2};\ b=\sqrt{c^2-a^2}}$$

Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ также следует, что $c^2 > a^2$ и $c^2 > b^2$, отсюда $c > a$ и $c > b$, то есть ***гипотенуза больше любого из катетов***[1].

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Запишите теорему Пифагора, если катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c.
3. Как по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону?
4. Какая из сторон прямоугольного треугольника является наибольшей?

УПРАЖНЕНИЯ

529.° Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 3 см и 4 см; 2) 6 см и 9 см.

530.° Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и другой катет соответственно равны: 1) 15 см и 12 см; 2) 7 см и $\sqrt{13}$ см.

531.° Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза. Найдите неизвестную сторону треугольника, если: 1) $a = 5$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 1$ см, $c = 2$ см; 3) $b = 3$ см, $c=\sqrt{90}$ см.

532.° Стороны прямоугольника равны 9 см и 40 см. Чему равна его диагональ?

533.° Одна из сторон прямоугольника равна 7 см, а диагональ — 25 см. Найдите соседнюю с данной сторону прямоугольника.

534.° Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 29 см, а высота, проведенная к основанию, — 21 см. Чему равно основание треугольника?

[1] Другим способом этот факт был установлен в курсе геометрии 7 класса.

535.° Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 35 см, а его основание — 24 см. Чему равна боковая сторона треугольника?

536.° В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.

537.° Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 24 см и 32 см.

538.° Сторона ромба равна 26 см, а одна из диагоналей — 48 см. Найдите другую диагональ ромба.

539.° Один из катетов прямоугольного треугольника равен 21 см, а другой катет на 7 см меньше гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

540.° Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а катеты относятся как 5 : 12. Найдите катеты этого треугольника.

541.• Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведенная к нему, — 5 см. Найдите гипотенузу треугольника.

542.• В треугольнике ABC известно, что $BC = 20$ см, высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 5$ см и $CD = 16$ см. Найдите сторону AB.

543.• В треугольнике ABC известно, что $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, угол C тупой, высота AD равна 8 см. Найдите сторону AC.

544.• Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a.

545.• Найдите диагональ квадрата со стороной a.

546.• Найдите сторону равностороннего треугольника, высота которого равна h.

547.• Найдите катеты прямоугольного равнобедренного треугольника, гипотенуза которого равна c.

548.• Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 177 (длины отрезков даны в сантиметрах).

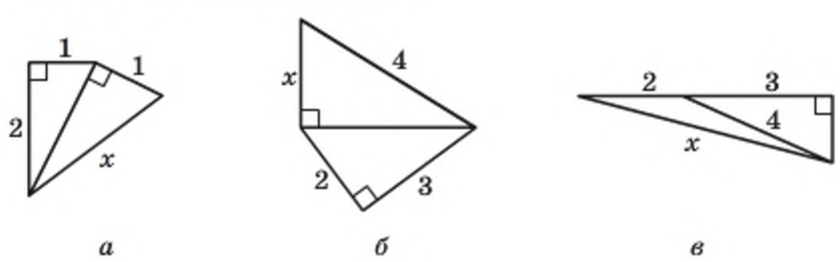
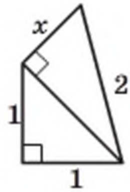


Рис. 177

549.° Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 178 (длины отрезков даны в сантиметрах).



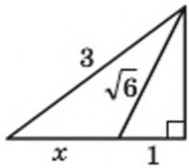


Рис. 178

550.° В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне, равна 8 см. Она делит боковую сторону на два отрезка, один из которых, прилежащий к вершине равнобедренного треугольника, равен 6 см. Найдите основание треугольника.

551.° Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, делит ее на отрезки длиной 4 см и 16 см, считая от вершины угла при основании. Найдите основание равнобедренного треугольника.

552.° Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 24 см, а радиус окружности, описанной около него, — 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

553.° Высота равнобедренного остроугольного треугольника, проведенная к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, описанной около него, — 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

554.° Основание равнобедренного треугольника на 2 см больше боковой стороны. Найдите стороны треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 8 см.

555.° Периметр равнобедренного треугольника равен 90 см, а высота, проведенная к основанию, — 15 см. Найдите стороны треугольника.

556.° Стороны тупоугольного треугольника равны 29 см, 25 см и 6 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к меньшей стороне.

557.° Стороны треугольника равны 36 см, 29 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к большей стороне.

558.$^{\bullet}$ Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 6, а проекции этих наклонных на прямую равны 7 см и 18 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой.

559.$^{\bullet}$ Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 15 см и 27 см. Сумма длин проекций этих наклонных на прямую равна 24 см. Найдите проекцию каждой наклонной.

560.$^{\bullet}$ Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из его катетов на отрезки 2 см и 6 см. Найдите стороны треугольника.

561.$^{\bullet}$ Найдите стороны параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см, если одна из диагоналей перпендикулярна его стороне.

562.$^{\bullet}$ Найдите периметр прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см.

563.$^{\bullet}$ Найдите периметр прямоугольного треугольника, если биссектриса острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 24 см и 51 см.

564.$^{\bullet}$ (*Старинная арабская задача.*) На противоположных берегах реки растут друг против друга две пальмы. Высота одной из них равна 30 локтей, высота другой — 20 локтей, а расстояние между основаниями пальм — 50 локтей. На вершине каждой пальмы сидит птица. Вдруг обе птицы увидели рыбу, которая показалась на поверхности воды между пальмами. Они взлетели с пальм одновременно и, двигаясь с одинаковой скоростью, одновременно схватили рыбу. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

565.$^{\bullet\bullet}$ Основания равнобокой трапеции равны 12 см и 20 см, а диагональ является биссектрисой тупого угла трапеции. Найдите эту диагональ.

566.$^{\bullet\bullet}$ Основания прямоугольной трапеции равны 18 см и 12 см, а диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Найдите эту диагональ.

567.$^{\bullet\bullet}$ В окружности по разные стороны от ее центра проведены две параллельные хорды длиной 16 см и 32 см. Расстояние между хордами равно 16 см. Найдите радиус окружности.

568.$^{\bullet\bullet}$ В окружности по одну сторону от ее центра проведены две параллельные хорды длиной 48 см и 24 см. Расстояние между хордами равно 12 см. Найдите радиус окружности.

569.•• Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 12 см, а расстояние от вершины равнобедренного треугольника до центра окружности — 20 см. Найдите периметр данного треугольника.

570.•• Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит ее большее основание на отрезки длиной 20 см и 25 см, считая от вершины прямого угла. Вычислите периметр трапеции.

571.•• Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит ее меньшее основание на отрезки длиной 6 см и 3 см, считая от вершины прямого угла. Вычислите периметр трапеции.

572.•• Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины меньшего острого угла.

573.•• Медианы AM и CK треугольника ABC перпендикулярны. Найдите стороны треугольника, если $AM = 9$ см и $CK = 12$ см.

574.•• В треугольнике ABC медианы BM и CK перпендикулярны и пересекаются в точке O. Найдите отрезок AO, если $BM = 36$ см и $CK = 15$ см.

575.•• (*Задача Бхаскары*[1].)

Над озером тихим, с полфута высотой
Высился лотоса цветок.
И ветер порывистый
Отнес его в сторону. Нет
Больше цветка над водой.
Нашел его рыбак
В двух футах от места, где он рос.
Итак, предлагаю вопрос:
Как глубока здесь озера вода?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

576. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 5$ см, $AC = 12$ см. Найдите отношение:

1) катета, прилежащего к углу A, и гипотенузы;
2) катета, противолежащего углу A, и гипотенузы;
3) катета, прилежащего к углу B, и гипотенузы;
4) катета, прилежащего к углу B, и катета, противолежащего этому углу.

---

[1] Бха́скара (1114–1185) — индийский математик и астроном.

577. На одной стороне угла A отметили точки B, C и D так, что $AB = BC = 5$ см, $CD = 10$ см (рис. 179). Из точек B, C и D опущены перпендикуляры BE, CF и DM на другую сторону угла A, причем $AE = 4$ см. Найдите отношение катета, прилежащего к углу A, и гипотенузы:

1) в треугольнике AEB;
2) в треугольнике AFC;
3) в треугольнике AMD.

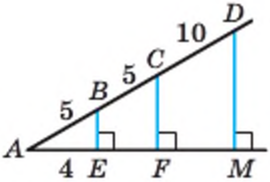


Рис. 179

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

578. В квадрате со стороной 1 м произвольным образом отметили 51 точку. Докажите, что среди этих точек существуют три, которые можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

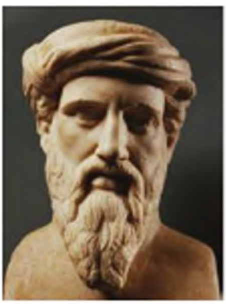
ПИФАГОР

Вы изучили знаменитую теорему, которая носит имя выдающегося древнегреческого ученого Пифагора.

Исследования древних текстов свидетельствуют о том, что утверждение этой теоремы было известно задолго до Пифагора. Почему же ее приписывают Пифагору? Скорее всего потому, что именно Пифагор нашел доказательство этого утверждения.

О жизни Пифагора мало что известно достоверно. Он родился на греческом острове Самос. По преданиям, он много путешествовал, приобретая знания и мудрость.

Поселившись в греческой колонии Кротон (на юге Италии), он окружил себя преданными учениками и единомышленниками. Так возник пифагорейский союз (или кротонское братство). Влияние этого союза было столь велико, что даже спустя столетия после смерти Пифагора многие выдающиеся математики Древнего мира называли себя пифагорейцами.



Пифагор
(VI в. до н. э.)

17. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

На рисунке 180 изображен прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Напомним, что катет BC называют **противолежащим** углу A, а катет AC — **прилежащим** к этому углу.

Определение. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначают так: $\sin A$ (читают: «синус A»). Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке 181, можно записать: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

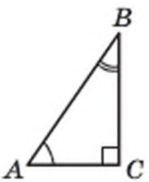


Рис. 180

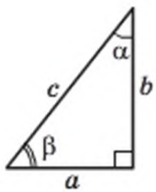


Рис. 181

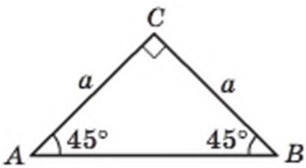


Рис. 182

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), в котором $AC = BC = a$ (рис. 182).

Имеем: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

По определению $\sin A = \frac{BC}{AB}$, отсюда $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Видим, что синус острого угла прямоугольного равнобедренного треугольника не зависит от размеров треугольника, так как полученное значение синуса одинаково для всех значений a. Поскольку $\angle A = 45°$, то $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Эту запись не связывают с конкретным прямоугольным равнобедренным треугольником.

Вообще, *если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны*.

Действительно, эти прямоугольные треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников. Поэтому отношение катета к гипотенузе одного треугольника равно отношению соответственного катета к гипотенузе другого треугольника.

Например, запись $\sin 17°$ можно отнести ко всем углам, градусные меры которых равны 17°. Значение этого синуса можно вычислить один раз, выбрав произвольный прямоугольный треугольник с острым углом 17°.

Следовательно, ***синус острого угла зависит только от величины этого угла***.

Определение. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначают так: $\cos A$ (читают: «косинус A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (рис. 180) можно записать:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Отметим, что катет прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы, а поэтому *синус и косинус острого угла меньше* 1.

Определение. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначают так: $\operatorname{tg} A$ (читают: «тангенс A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (рис. 180) можно записать:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Определение. Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначают так: $\operatorname{ctg} A$ (читают: «котангенс A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (рис. 180) можно записать:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке 181, записывают: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Как было установлено, синус угла зависит только от величины угла. Рассуждая аналогично, можно прийти к следующему выводу:

косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от величины этого угла.

Вообще, каждому острому углу α соответствует единственное число — значение синуса (косинуса, тангенса, котангенса) этого угла. Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) острого угла от величины этого угла является функциональной. Функцию, соответствующую этой зависимости, называют **тригонометрической**. Так, $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$ — тригонометрические функции, аргументами которых являются острые углы.

С древних времен люди составляли таблицы приближенных значений тригонометрических функций с некоторым шагом, один раз вычисляя значения тригонометрических функций для конкретного аргумента. Затем эти таблицы широко использовались во многих областях науки и техники.

В наше время значения тригонометрических функций острых углов удобно находить с помощью микрокалькулятора.

Тангенс и котангенс острого угла можно выразить через синус и косинус этого же угла. Рассмотрим прямоугольный треугольник (рис. 181). Запишем: $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \dfrac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, получаем такие формулы:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Заметим, что тангенс и котангенс одного и того же острого угла являются взаимно обратными числами, то есть имеет место равенство:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Обе части этого равенства разделим на c^2. Имеем: $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$. Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, получим:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Принято записывать: $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. Отсюда имеем:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Эту формулу называют **основным тригонометрическим тождеством.**

Отметим, что $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Поскольку $\beta = 90° - \alpha$, то получаем такие формулы:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha \\ \sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(90° - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90° - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}}$$

Мы уже знаем, что $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдем теперь $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$ и $\operatorname{ctg} 45°$. Имеем:

$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1, \ \operatorname{ctg} 45° = \frac{1}{\operatorname{tg} 45°} = 1.$$

Найдем синус, косинус, тангенс и котангенс углов 30° и 60°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 183).

Пусть $BC = a$. Тогда по свойству катета, лежащего против угла 30°, получаем, что $AB = 2a$. Из теоремы Пифагора следует, что $AC^2 = AB^2 - BC^2$. Имеем: $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$; $AC = a\sqrt{3}$. Отсюда находим:

$$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \ \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \sqrt{3}.$$

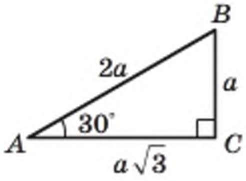


Рис. 183

Поскольку $60° = 90° - 30°$, то получаем:

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}, \ \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60° полезно запомнить.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

?

1. Что называют синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называют косинусом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Что называют тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
4. Что называют котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
5. От чего зависят синус, косинус, тангенс и котангенс угла?
6. Как связаны между собой $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
7. Как связаны между собой $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
8. Как связаны между собой $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$?
9. Как связаны между собой $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
10. Чему равен $\sin(90° - \alpha)$? $\cos(90° - \alpha)$? $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$? $\operatorname{ctg}(90° - \alpha)$?
11. Чему равен $\sin 45°$? $\cos 45°$? $\operatorname{tg} 45°$? $\operatorname{ctg} 45°$?
12. Чему равен $\sin 30°$? $\cos 30°$? $\operatorname{tg} 30°$? $\operatorname{ctg} 30°$?
13. Чему равен $\sin 60°$? $\cos 60°$? $\operatorname{tg} 60°$? $\operatorname{ctg} 60°$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

579.• Постройте угол:

1) тангенс которого равен $\frac{4}{5}$; 2) синус которого равен $\frac{2}{3}$.

580.• Постройте угол:

1) косинус которого равен $\frac{1}{4}$; 2) котангенс которого равен $\frac{1}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

581.° Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 8 см и 10 см. Найдите:

1) синус угла, противолежащего меньшему катету;
2) косинус угла, прилежащего к большему катету;
3) тангенс угла, противолежащего меньшему катету;
4) котангенс угла, прилежащего к большему катету.

582.° Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 2 см. Найдите:

1) тангенс угла, прилежащего к большему катету;
2) синус угла, противолежащего меньшему катету;
3) косинус угла, прилежащего к большему катету;
4) котангенс угла, противолежащего большему катету.

583.° Найдите значение выражения:

1) $\cos^2 45° + \operatorname{tg}^2 60°$; 2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60° \operatorname{ctg} 60°$.

584.° Найдите значение выражения:

1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$; 2) $3\operatorname{tg}^2 30° + 4\operatorname{tg} 45° + \cos 30° \operatorname{ctg} 30°$.

585.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Найдите синусы острых углов треугольника.

586.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Найдите косинусы острых углов треугольника.

587.• Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

588.• Найдите $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$, если $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

589.• Синус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс другого острого угла этого треугольника.

590.$^{\bullet}$ Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между боковой стороной треугольника и высотой, проведенной к его основанию.

591.$^{\bullet}$ Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а высота, проведенная к основанию, — 8 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла при основании треугольника.

592.$^{\bullet}$ Найдите углы ромба, диагонали которого равны 4 см и $4\sqrt{3}$ см.

593.$^{\bullet}$ Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами, длины которых равны $\sqrt{3}$ см и 3 см.

594.$^{\bullet}$ В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла A трапеции.

595.$^{\bullet}$ В прямоугольной трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Найдите углы трапеции, прилежащие к ее большей боковой стороне.

596.$^{\bullet}$ Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника являются взаимно обратными числами.

597.$^{\bullet}$ Докажите тождество:

1) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$; 2) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

598.$^{\bullet}$ Найдите значение выражения:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$; 2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

599.$^{\bullet\bullet}$ Катеты прямоугольного треугольника равны 30 см и 40 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

600.$^{\bullet\bullet}$ В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, BD и AM — высоты треугольника, $BD : AM = 3 : 1$. Найдите $\cos C$.

601.$^{\bullet\bullet}$ В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, BD и CK — высоты треугольника, $\cos A = \dfrac{3}{7}$. Найдите отношение $CK : BD$.

602.* Докажите, что углы ABC и DEF, изображенные на рисунке 184, равны.

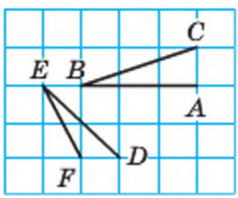


Рис. 184

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

603. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, $AB = 6$ см. Найдите радиус окружности, которая проходит через точки A, B и M.

604. Хорды AB и BC окружности перпендикулярны, а расстояние между их серединами равно 12 см. Найдите радиус окружности.

605. В треугольнике ABC известно, что BK — высота, AM — биссектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. Из точки M опущен перпендикуляр MD на сторону AC. Найдите отрезок MD.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

606. Даны два круга, не имеющие общих точек. Существует ли точка, которая не принадлежит ни одному из кругов, такая, что любая прямая, проходящая через эту точку, пересекает хотя бы один из этих кругов?

18. Решение прямоугольных треугольников

На рисунке 185 изображен прямоугольный треугольник с острыми углами α и β, катеты которого равны a и b, а гипотенуза равна c.

По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Отсюда $a = c \sin \alpha$, $b = c \sin \beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.***

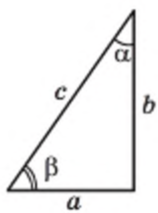


Рис. 185

По определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Отсюда $b = c \cos \alpha$, $a = c \cos \beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.***

По определению тангенса острого угла прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Отсюда $a = b \operatorname{tg} \alpha$, $b = a \operatorname{tg} \beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.***

По определению котангенса острого угла прямоугольного треугольника $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$. Отсюда $b = a\operatorname{ctg}\alpha$, $a = b\operatorname{ctg}\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.***

Из равенств $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ получаем: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ и $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Следовательно, ***гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла;***

гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

Решить прямоугольный треугольник означает найти его стороны и углы по известным сторонам и углам.

Приведенные выше правила позволяют решать прямоугольный треугольник по одной стороне и одному острому углу.

В задачах на решение прямоугольных треугольников, если не обусловлено иначе, приняты такие обозначения (см. рис. 185): c — гипотенуза, a и b — катеты, α и β — углы, противолежащие катетам a и b соответственно.

Задача 1. Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$. (Значения тригонометрических функций найдите с помощью микрокалькулятора и округлите их до сотых. Значения длин сторон округлите до десятых.)

Решение. Имеем:

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°$;

$b = a\operatorname{tg}\beta = 14\operatorname{tg}52° \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (см);

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{14}{\sin 38°} = \frac{14}{0{,}62} = 22{,}6 \text{ (см)}.$$

Ответ: $c \approx 22{,}6$ см, $b \approx 17{,}9$ см, $\beta = 52°$.

Отметим, что эту задачу можно было решить и другим способом: например, найти гипотенузу, используя теорему Пифагора.

Задача 2. Решите прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

Решение. Имеем: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0{,}7647\ldots$.

Вычисляем угол α с помощью микрокалькулятора: $\alpha \approx 50°$. Тогда $\beta \approx 40°$.

$$b = c \sin \beta = 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 \approx 21{,}862 \approx 21{,}9 \text{ (см).}$$

Ответ: $b \approx 21{,}9$ см, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.

Задача 3. Высота AD треугольника ABC (рис. 186) делит его сторону BC на отрезки BD и CD такие, что $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Найдите стороны AB и AC, если $\angle B = 60°$.

Решение. Из треугольника ADB ($\angle ADB = 90°$) получаем:

$$AD = BD \operatorname{tg} B = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (см);}$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Из треугольника ADC ($\angle ADC = 90°$) получаем:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см).}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$ см, 10 см.

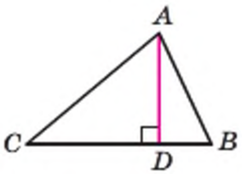


Рис. 186

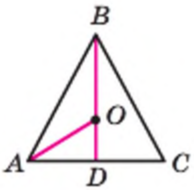


Рис. 187

Задача 4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, угол при основании равен α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 187) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Проведем высоту BD.

Из треугольника ADB ($\angle ADB = 90°$) получаем:

$$AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha.$$

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Следовательно, точка O принадлежит высоте BD и биссектрисе AO угла BAC. Поскольку $OD \perp AC$, то вписанная окружность касается стороны AC в точке D. Таким образом, OD — радиус вписанной окружности. Отрезок AO — биссектриса угла BAD, поэтому $\angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\alpha}{2}$.

Из треугольника ADO ($\angle ADO = 90°$) получаем:

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $b \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и угол, противолежащий этому катету?
2. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и угол, прилежащий к этому катету?
3. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны другой катет и угол, противолежащий искомому катету?
4. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны другой катет и угол, прилежащий к искомому катету?
5. Как можно найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и противолежащий этому катету угол?
6. Как можно найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и прилежащий к этому катету угол?

УПРАЖНЕНИЯ

607.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$. Найдите:

1) BC, если $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) AC, если $AB = 21$ см, $\cos A = 0,4$;
3) AC, если $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1,6$;
4) AB, если $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) AB, если $AC = 3,2$ см, $\sin B = 0,16$;
6) BC, если $AC = 2,3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

608.° В треугольнике DEF известно, что $\angle E = 90°$. Найдите:

1) DE, если $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;
2) DF, если $EF = 3,5$ см, $\cos F = 0,7$;
3) EF, если $DE = 2,4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

609.° В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 17 см, а синус одного из острых углов — $\frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника.

610.° Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а косинус одного из острых углов — 0,8. Найдите катеты треугольника.

611.° Катет прямоугольного треугольника равен 48 см, а тангенс противолежащего угла — $3\frac{3}{7}$. Найдите другой катет и гипотенузу треугольника.

612.° В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 12 см, а тангенс прилежащего угла — 0,75. Найдите другой катет и гипотенузу треугольника.

613.° Решите прямоугольный треугольник:
1) по гипотенузе и острому углу: $c = 28$ см, $\alpha = 48°$;
2) по катету и острому углу: $a = 56$ см, $\beta = 74°$;
3) по катету и гипотенузе: $a = 5$ см, $c = 9$ см;
4) по двум катетам: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

614.° Решите прямоугольный треугольник по известным элементам:
1) $a = 34$ см, $\alpha = 55°$;
2) $c = 16$ см, $\beta = 18°$;
3) $b = 12$ см, $c = 13$ см;
4) $a = 4$ см, $b = 14$ см.

615.° Используя данные рисунка 188, найдите высоту дерева.

616.° Какой длины должна быть пожарная лестница, чтобы по ней можно было подняться на крышу дома высотой 9 м, если ставить ее под углом 70° к поверхности земли?

617.° Проехав от старта по прямолинейному участку шоссе 300 м, велосипедист оказался в точке, расположенной на 11 м выше, чем точка старта. Найдите тангенс угла подъема шоссе на этом участке.

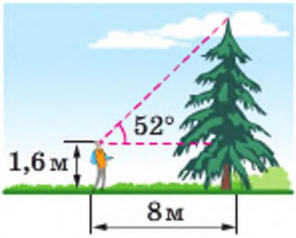


Рис. 188

618.° Под каким углом падает на землю солнечный луч, если длина тени от вертикального шеста равна длине самого шеста?

619.• Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, а высота, проведенная к основанию, — $3\sqrt{3}$ см. Найдите стороны треугольника.

620.• Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 12 см, а угол при основании — 45°. Найдите высоту и боковую сторону трапеции.

621.• Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне и равна a. Найдите стороны параллелограмма, если один из его углов равен 30°.

622.• Сторона ромба равна a, а один из его углов — 60°. Найдите диагонали ромба.

623.• Траншея в сечении имеет форму равнобокой трапеции (рис. 189). Найдите угол, который образуют стенки траншеи с ее дном.

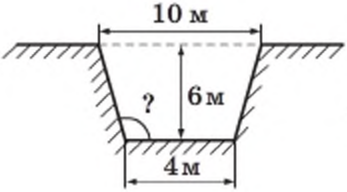


Рис. 189

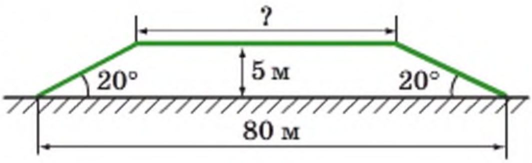


Рис. 190

624.• Ширина насыпи шоссейной дороги в нижней ее части равна 80 м (рис. 190), высота насыпи — 5 м, а откосы наклонены к горизонту под углом 20°. Найдите ширину насыпи в верхней ее части.

625.• Высота BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и CD так, что $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Найдите сторону BC, если $\angle A = 30°$.

626.• Высота AF делит сторону BC треугольника ABC на отрезки BF и CF. Найдите сторону AC, если $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60°$, а сторона AB равна 18 см.

627.• Из точки D, лежащей вне прямой n, проведены к этой прямой наклонные DK и DB, образующие с ней углы 45° и 60° соответственно. Найдите длину проекции наклонной DK на прямую n, если $DB = 10\sqrt{3}$ см.

628.• Из точки M, лежащей вне прямой l, проведены к этой прямой наклонные MN и MK, образующие с ней углы 30° и 45° соответственно. Найдите наклонную MK, если проекция наклонной MN на прямую l равна $4\sqrt{3}$ см.

629.• Угол при вершине равнобедренного треугольника равен β, высота, проведенная к боковой стороне, равна h. Найдите основание треугольника.

630.° Высота, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна h, острый угол равен α. Найдите стороны треугольника.

631.° Один из катетов прямоугольного треугольника равен a. Угол между другим катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла, равен φ. Найдите неизвестные стороны треугольника и проведенную высоту.

632.° Бо́льшая диагональ ромба равна d, а острый угол равен α. Найдите сторону и меньшую диагональ ромба.

633.° Острый угол ромба равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найдите сторону и диагонали ромба.

634.°° Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол 30°. Найдите высоту трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен R.

635.°° Одна из сторон треугольника равна a, прилежащие к ней углы равны 45° и 60°. Найдите высоту треугольника, проведенную к данной стороне.

636.°° Основания трапеции равны 7 см и 15 см, а углы при большем основании — 30° и 60°. Найдите высоту и диагонали трапеции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

637. Периметр параллелограмма равен 48 см. Биссектриса тупого угла делит его сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Может ли меньшая сторона параллелограмма быть равной 7 см?

638. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $\angle BAC = 52°$, $\angle DBC = 34°$, $\angle ADB = 17°$. Найдите углы четырехугольника.

639. Известно, что O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Найдите отрезки BO и OD, если $AO : OC = 7 : 6$ и $BD = 39$ см.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

640. Разрежьте ромб на четыре четырехугольника так, чтобы каждый из них являлся вписанным в окружность и описанным около окружности.

ЗАДАНИЕ № 3 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Диаметр AB окружности с центром O перпендикулярен хорде CD (рис. 191). Какое из данных равенств неверно?

А) $AC^2 = AM \cdot AB$;

Б) $CM^2 = AM \cdot MB$;

В) $AD^2 = MB \cdot AB$;

Г) $DM^2 = AM \cdot MB$.

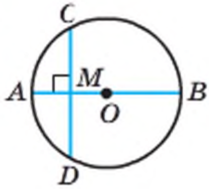
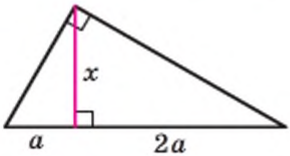


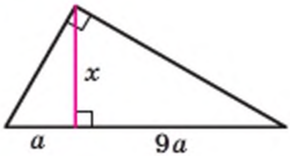
Рис. 191

2. На каком рисунке длина отрезка x равна $2a$?

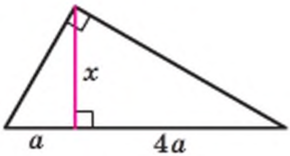
А)



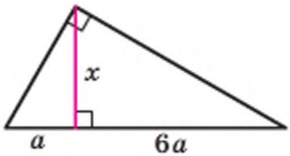
В)



Б)



Г)



3. Из теоремы Пифагора следует, что гипотенуза:

А) равна сумме катетов;

Б) равна сумме квадратов катетов;

В) больше катета;

Г) равна квадрату суммы катетов.

4. Длина отрезка x на рисунке 192 равна:

А) 4; В) 5;

Б) 3; Г) $3\sqrt{2}$.

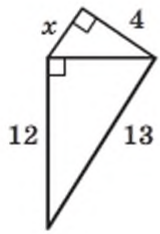


Рис. 192

5. Биссектриса равностороннего треугольника со стороной a равна:

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

Б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; Г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Радиус окружности, описанной около квадрата со стороной a, равен:

А) $\frac{a}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; Г) $2a$.

7. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна a. Тогда его катет равен:

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $2a$; Г) $\frac{a}{2}$.

8. Пусть α и β — острые углы прямоугольного неравнобедренного треугольника. Какое из данных равенств верно?

А) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$; В) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \cos\beta$;

Б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$; Г) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$.

9. Пусть α — острый угол прямоугольного треугольника. Какое из данных равенств не может выполняться?

А) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; В) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; Г) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. Длина отрезка x на рисунке 193 равна:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin\alpha$; В) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;

Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$; Г) $a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

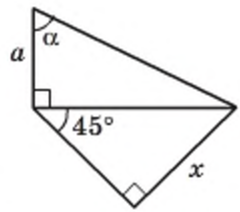


Рис. 193

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 3

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Синус острого угла прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус острого угла прямоугольного треугольника

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Тригонометрические формулы

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — основное тригонометрическое тождество

$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg} (90° - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} (90° - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

Соотношения между сторонами и значениями тригонометрических функций углов в прямоугольном треугольнике

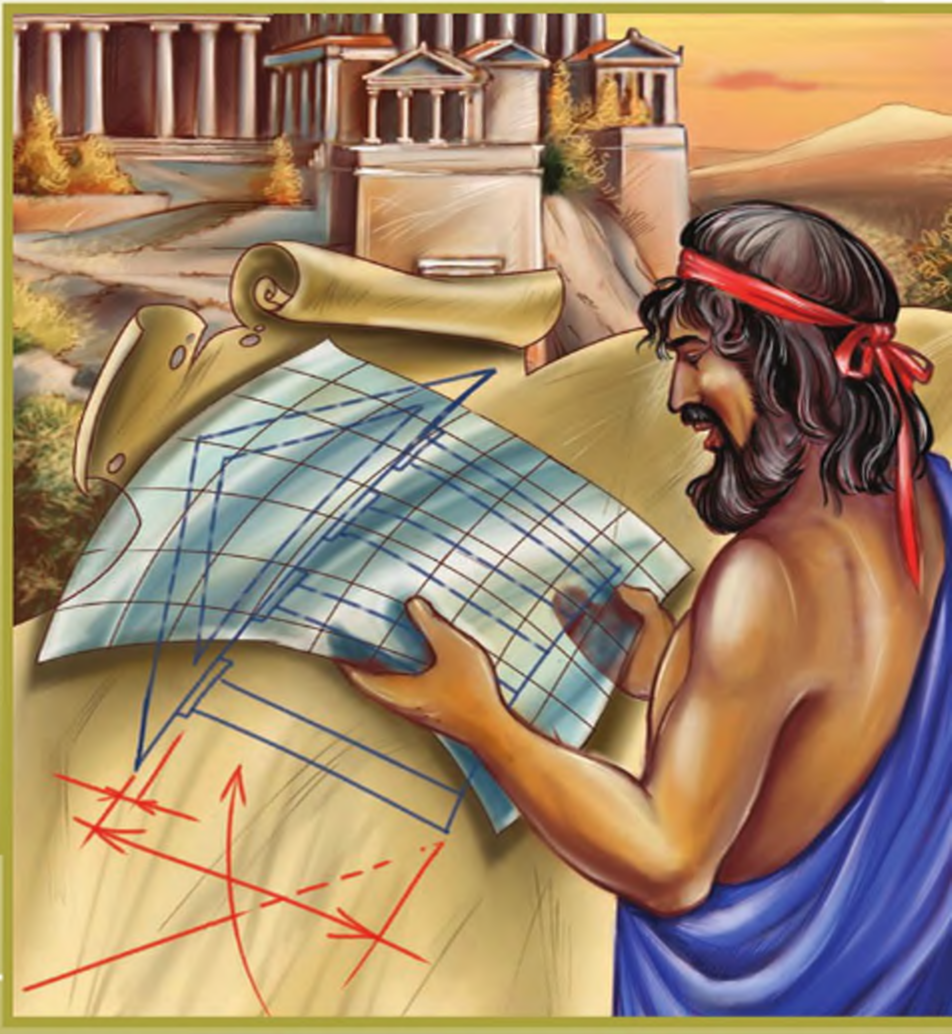
- Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.
- Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.
- Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.
- Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.
- Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.
- Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

§4 МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

Изучив материал этого параграфа, вы узнаете формулу, с помощью которой можно найти сумму углов выпуклого многоугольника.

Вы расширите свои представления о такой знакомой вам величине, как площадь.

Вы научитесь находить площадь параллелограмма, треугольника, трапеции.



19. Многоугольники

Рассмотрим фигуру, состоящую из точек A_1, A_2, A_3, …, A_n и отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 таких, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек (рис. 194).

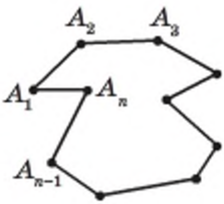


Рис. 194

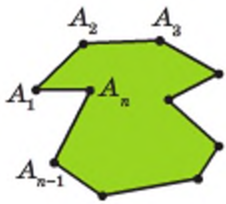


Рис. 195

Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 195 зеленым цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 называют **многоугольником**. Точки A_1, A_2, A_3, …, A_n называют **вершинами** многоугольника, а указанные выше отрезки — **сторонами** многоугольника.

Стороны, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** многоугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** многоугольника.

Две соседние стороны многоугольника образуют **угол** многоугольника. Например, на рисунке 196 α, β, γ, δ — углы многоугольника, а φ не является углом многоугольника.

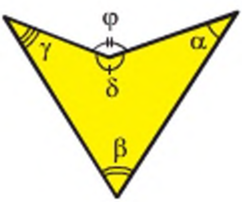


Рис. 196

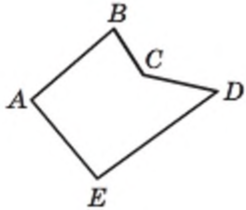


Рис. 197

Многоугольник называют по количеству его углов: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и т. п.

Многоугольник обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 197 изображен пятиугольник $ABCDE$. В обозначении многоугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам. Например, пятиугольник, изображенный на рисунке 197, можно обозначить еще и так: $CDEAB$, $EABCD$, $EDCBA$ и т. д.

Периметром многоугольника называют сумму длин всех его сторон.

Отрезок, соединяющий несоседние вершины многоугольника, называют **диагональю**. Например, на рисунке 198 отрезок AE — диагональ шестиугольника $ABCDEF$.

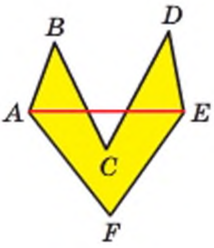


Рис. 198

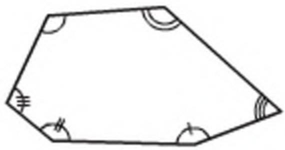


Рис. 199

На рисунке 199 изображен многоугольник, все углы которого меньше развернутого. Такой многоугольник называют **выпуклым**. Из сказанного следует, что любой треугольник является выпуклым многоугольником. Заметим, что многоугольники, изображенные на рисунках 196–198, не являются выпуклыми.

Выпуклый многоугольник обладает такими свойствами:

1) *выпуклый многоугольник расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону* (рис. 200);

2) *выпуклый многоугольник, отличный от треугольника, содержит любую свою диагональ* (рис. 201).

Если многоугольник не является выпуклым, то он такими свойствами не обладает (рис. 198, 202).

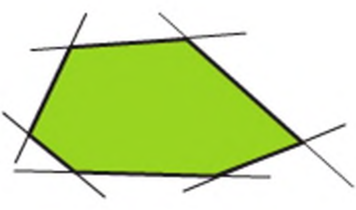


Рис. 200

Рис. 201

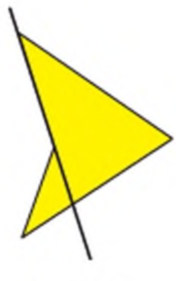


Рис. 202

Теорема 19.1. ***Сумма углов выпуклого n-угольника равна*** **$180^\circ (n - 2)$.**

Доказательство. Для случая $n = 3$ теорема была доказана в 7 классе (теорема 16.1).

Пусть $n > 3$. На рисунке 203 изображен выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Докажем, что сумма всех его углов равна $180^\circ (n - 2)$.

Проведем все его диагонали, выходящие из вершины A_1. Эти диагонали разбивают данный многоугольник на $(n - 2)$ треугольника. Сумма всех углов этих треугольников равна сумме углов n-угольника. Поскольку сумма углов каждого треугольника равна 180°, то искомая сумма равна $180^\circ (n - 2)$. ▲

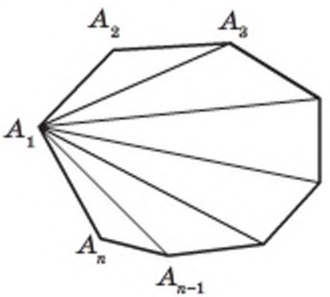


Рис. 203

Рис. 204

Отметим, что эта теорема справедлива и для любого многоугольника, не являющегося выпуклым.

Определение. **Окружность называют описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины.**

На рисунке 204 изображена окружность, описанная около многоугольника. В этом случае также говорят, что многоугольник **вписан** в окружность.

Центр окружности, описанной около многоугольника, равноудален от всех его вершин. Следовательно, этот центр принадлежит серединным перпендикулярам всех сторон многоугольника, вписанного в окружность.

Около многоугольника можно описать окружность, если существует точка, равноудаленная от всех его вершин. Следовательно, если серединные перпендикуляры всех сторон многоугольника пересекаются в одной точке, то около такого многоугольника можно описать окружность.

Определение. Окружность называют вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон.

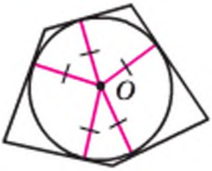


Рис. 205

На рисунке 205 изображена окружность, вписанная в многоугольник. В этом случае также говорят, что многоугольник **описан** около окружности.

Центр окружности, вписанной в многоугольник, равноудален от всех его сторон. Следовательно, этот центр принадлежит биссектрисам всех углов многоугольника, описанного около окружности.

1. Объясните, какую фигуру называют многоугольником.
2. Что называют периметром многоугольника?
3. Что называют диагональю многоугольника?
4. Какой многоугольник называют выпуклым?
5. Как расположен выпуклый многоугольник относительно любой прямой, содержащей его сторону?
6. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
7. Какую окружность называют описанной около многоугольника?
8. Какая точка является центром окружности, описанной около многоугольника?
9. Какую окружность называют вписанной в многоугольник?
10. Какая точка является центром окружности, вписанной в многоугольник?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

641.° Начертите и обозначьте произвольный выпуклый семиугольник, назовите все его вершины и стороны. Проведите из одной вершины все диагонали, назовите их. На сколько треугольников диагонали разбили семиугольник?

642.° Начертите шестиугольник, каждый угол которого равен 120°, а каждая сторона — 4 см. Опишите около этого шестиугольника окружность и впишите в него окружность.

643.° Начертите пятиугольник, каждый угол которого равен 108°, а каждая сторона — 3 см. Опишите около этого пятиугольника окружность и впишите в него окружность.

644.° Начертите окружность произвольного радиуса, разделите ее на 8 равных дуг. Используя точки деления, постройте восьмиугольник, вписанный в окружность.

645.° Начертите окружность произвольного радиуса, разделите ее на 12 равных дуг. Используя точки деления, постройте двенадцатиугольник, вписанный в окружность.

УПРАЖНЕНИЯ

646.° Найдите стороны пятиугольника $ABCDE$, если сторона BC на 1 см больше стороны AB, CD на 2 см больше AB, DE на 3 см больше AB, AE на 4 см больше AB, а периметр пятиугольника равен 100 см.

647.° Найдите сумму углов выпуклого: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двадцатичетырехугольника.

648.° Найдите сумму углов выпуклого: 1) девятиугольника; 2) шестнадцатиугольника.

649.° Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

650.° Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен: 1) 150°; 2) 100°?

651.• При съемке плана земельного участка, имеющего форму пятиугольника (рис. 206), получили такие величины углов: $\angle A = 116°$, $\angle B = 98°$, $\angle C = 124°$, $\angle D = 102°$, $\angle E = 130°$. Верно ли были выполнены измерения?

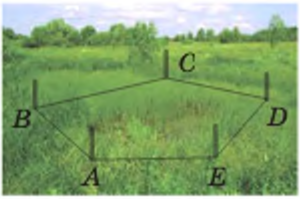


Рис. 206

652.• Найдите углы выпуклого шестиугольника, если они относятся как 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5.

653.• Найдите углы выпуклого семиугольника, если они относятся как 6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11.

654.• Сколько диагоналей можно провести: 1) в девятиугольнике; 2) в двадцатиугольнике; 3) в n-угольнике?

655.• В выпуклом многоугольнике 54 диагонали. Найдите количество его сторон и сумму углов.

656.• Докажите, что если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его углы также равны.

657.• Докажите, что если все углы многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его стороны также равны.

658.•• Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а углы, прилежащие к одной из сторон, — прямые. Найдите остальные углы пятиугольника.

659.•• Три угла выпуклого многоугольника равны по 100°, а остальные — по 120°. Определите вид многоугольника.

660.•• Докажите, что если углы выпуклого шестиугольника равны, то его стороны образуют три пары параллельных сторон.

661.•• Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника равны, то он не имеет параллельных сторон.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

662. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7 см и 11 см. Найдите периметр трапеции.

663. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведенные к гипотенузе, равны соответственно 13 см и 12 см. Найдите периметр данного треугольника.

664. Биссектриса угла A треугольника ABC ($\angle C = 90°$) делит катет BC на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите радиус окружности, проходящей через точку A, точку C и точку пересечения данной биссектрисы с катетом BC.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

665. На окружности радиуса 1 отметили 1000 точек. Докажите, что найдется точка, принадлежащая данной окружности, сумма расстояний от которой до отмеченных точек больше 1000.

20. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

С такой величиной, как площадь, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: площадь квартиры, площадь дачного участка, площадь поля и т. п.

Опыт подсказывает вам, что равные земельные участки имеют равные площади, что площадь квартиры равна сумме площадей всех ее помещений (комнат, кухни, коридора и т. д.).

Вы знаете, что площади земельных участков измеряют в сотках (арах) и гектарах; площади регионов и государств — в квадратных километрах; площадь квартиры — в квадратных метрах.

На этих практических знаниях о площади основывается определение площади многоугольника.

Определение. Площадью многоугольника называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:

1) **равные многоугольники имеют равные площади;**
2) **если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;**
3) **за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, то есть квадрат со стороной, равной единице измерения длины.**

Измерить площадь многоугольника — это значит сравнить его площадь с площадью единичного квадрата. В результате получают **числовое значение площади** данного многоугольника. Это число показывает, во сколько раз площадь данного многоугольника отличается от площади единичного квадрата.

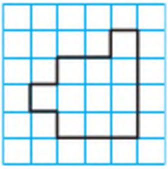


Рис. 207

Например, если клетку вашей тетради принять за единичный квадрат, то площадь многоугольника, изображенного на рисунке 207, будет равна 11 квадратным единицам (кратко записывают: 11 ед.^{2}).

Обычно для нахождения площади используют формулы, то есть вычисляют площадь многоугольника по определенным элементам (сторонам, диагоналям, высотам и т. д.). Некоторые из формул вы уже знаете. Например, вы неоднократно применяли формулу $S = ab$, где S — площадь прямоугольника, a и b — длины его соседних сторон.

Для доказательства этой формулы потребуется следующая лемма.

Лемма. ***Площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ ед. (n — натуральное число) равна $\frac{1}{n^2}$ ед.^{2}.***

Доказательство. Рассмотрим единичный квадрат и разделим его на n^2 равных квадратов со стороной $\frac{1}{n}$ (рис. 208).

Из определения площади многоугольника (свойство 1) следует, что все эти квадраты имеют равные площади. По свойству 2 сумма площадей этих квадратов равна площади единичного квадрата, то есть 1 ед.^{2}. Поэтому площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$ ед.^{2}. ▲

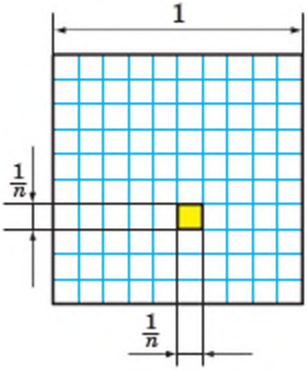


Рис. 208

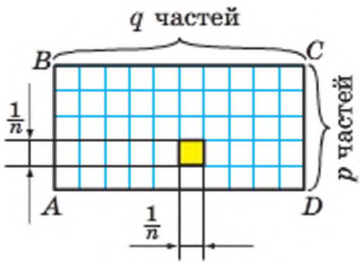


Рис. 209

Теорема 20.1. ***Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон.***

Доказательство. На рисунке 209 изображен прямоугольник $ABCD$, длины соседних сторон которого равны a и b: $AB = a$, $BC = b$. Докажем для случая, когда a и b — рациональные числа, что площадь S прямоугольника вычисляют по формуле $S = ab$.

Числа a и b представим в виде обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями:

$$a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n},$$

где p, q, n — натуральные числа.

Разделим сторону AB на p равных частей, а сторону BC — на q равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Тогда прямоугольник будет разделен на pq равных квадратов со стороной $\frac{1}{n}$.

Согласно лемме площадь каждого квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Из определения площади (свойство 2) следует, что площадь прямоугольника равна сумме площадей всех квадратов, то есть

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ слагаемых}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

Рассмотрение случая, когда хотя бы одно из чисел a или b является иррациональным, выходит за рамки школьного курса геометрии. ▲

Определение. Многоугольники, имеющие равные площади, называют *равновеликими*.

Из определения площади (свойство 1) следует, что все равные фигуры равновелики. Однако не все фигуры, имеющие равные площади, являются равными. Например, на рисунке 210 изображены два многоугольника, каждый из которых составлен из семи единичных квадратов. Эти многоугольники равновелики, но не равны.

Рис. 210

1. Что называют площадью многоугольника?
2. Что значит измерить площадь многоугольника?
3. Что показывает числовое значение площади?
4. Чему равна площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ ед., где n — натуральное число?
5. Чему равна площадь прямоугольника?
6. Какие многоугольники называют равновеликими?
7. Можно ли утверждать, что если две фигуры равны, то они равновелики?
8. Можно ли утверждать, что если две фигуры равновелики, то они равны?

УПРАЖНЕНИЯ

666.° Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 5 см больше другой, а площадь прямоугольника равна 36 см².

667.° Площадь прямоугольника равна 270 см², а его стороны относятся как 5 : 6. Чему равны стороны прямоугольника?

668.° Какие из прямоугольников, изображенных на рисунке 211, равновелики?

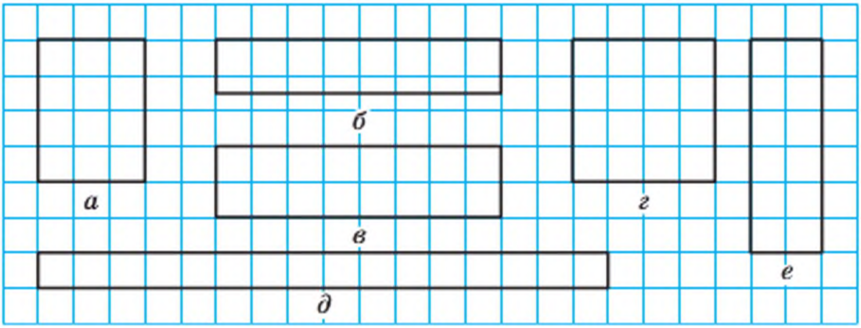


Рис. 211

669.° Квадрат со стороной 12 см и прямоугольник, одна из сторон которого равна 8 см, равновелики. Найдите периметр данного прямоугольника.

670.° Найдите периметр квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 2 см и 32 см.

671.° Хватит ли 5 т гороха, чтобы засеять им поле, имеющее форму прямоугольника со сторонами 500 м и 400 м, если на 1 га нужно высеять 260 кг гороха?

672.° Длина стены равна 6 м, а высота — 3 м. Хватит ли пяти контейнеров кафеля, чтобы облицевать им эту стену, если одна плитка имеет форму квадрата со стороной 15 см, а в один контейнер помещается 160 плиток?

673.° Расход эмалевой краски на однослойное покрытие составляет 180 г на 1 м². Хватит ли 3 кг эмали, чтобы покрасить стену длиной 6 м и высотой 3 м?

674.° Давление некоторого газа в сосуде составляет 0,0015 Н/м². С какой силой давит этот газ на стенку сосуда прямоугольной формы размером 35×24 см?

675.° Предел прочности стали некоторой марки равен 60 Н/мм². При какой нагрузке разорвется стержень, поперечное сечение которого является прямоугольником со сторонами 20 мм и 10 мм?

676.• Диагональ прямоугольника равна d и образует с одной из сторон угол α. Найдите площадь прямоугольника.

677.• Сторона прямоугольника равна 15 см и образует с диагональю угол 30°. Найдите площадь прямоугольника.

678.• Найдите отношение площадей двух квадратов, стороны которых относятся как: 1) 3 : 4; 2) $2:\sqrt{5}$.

679.• Как относятся стороны двух квадратов, если их площади относятся как: 1) 25 : 36; 2) 3 : 49?

680.• Одна из сторон прямоугольника равна 28 см. Как изменится площадь прямоугольника, если соседнюю его сторону уменьшить на 5 см?

681.• Как изменится площадь прямоугольника, если:
1) две его противолежащие стороны увеличить в 3 раза;
2) все его стороны увеличить в 3 раза;
3) две его противолежащие стороны увеличить в 6 раз, а две другие — уменьшить в 3 раза?

682.• Как изменится площадь прямоугольника, если:
1) две его противолежащие стороны уменьшить в 4 раза, а две другие — в 2 раза;
2) две его противолежащие стороны увеличить в 4 раза, а две другие — уменьшить в 4 раза?

683.• На продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ за точку D отметили точку M так, что $AD = MD$. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ и треугольник ABM равновелики.

684.• Площадь квадрата $ABCD$ равна 10 см² (рис. 212). Чему равна площадь прямоугольника $BMKD$?

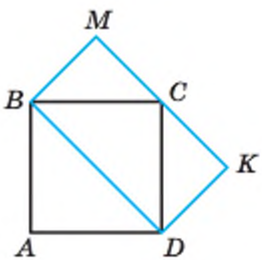


Рис. 212

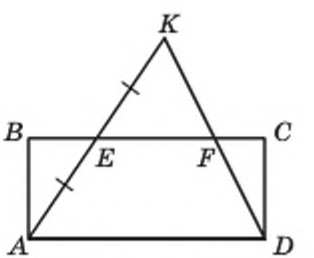


Рис. 213

685.• Докажите, что если точка E — середина отрезка AK (рис. 213), то треугольник AKD и прямоугольник $ABCD$ равновелики.

686.$^{\bullet}$ Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

687.$^{\bullet}$ Площадь прямоугольного листа бумаги, длины сторон которого выражены целыми числами сантиметров, равна 12 см^2. Сколько квадратов площадью 4 см^2 можно вырезать из этого листа?

688.$^{\bullet}$ Площадь прямоугольного листа бумаги, длины сторон которого выражены целыми числами сантиметров, равна 18 см^2. Сколько квадратов со стороной 3 см можно вырезать из этого листа?

689.$^{\bullet}$ Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 2 : 7. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 108 см.

690.$^{\bullet}$ Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 1 : 4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 36 см^2.

691.* Постройте квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.

692.* Стороны прямоугольника равны a и b. Постройте квадрат, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

693. Серединный перпендикуляр диагонали BD параллелограмма $ABCD$ пересекает стороны AB и CD. Продолжения сторон AD и BC он пересекает в точках M и K соответственно. Определите вид четырехугольника $MBKD$.

694. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите отрезок AM, если $AB = 6$ см и $BC : AD = 3 : 4$.

695. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до его стороны, если острый угол ромба равен $30°$, а сторона — 8 см.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

696. Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей одного треугольника подобна одной из частей другого треугольника. Можно ли утверждать, что две оставшиеся части также подобны?

21. Площадь параллелограмма

Теорема 21.1. ***Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.***

Доказательство. На рисунке 214 изображены параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна S, и его высота BM. Докажем, что $S = BC \cdot BM$.

Проведем высоту CN. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что четырехугольник $MBCN$ — прямоугольник. Покажем, что он равновелик данному параллелограмму.

Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольника ABM и трапеции $MBCD$. Площадь прямоугольника равна сумме площадей указанной трапеции и треугольника DCN. Однако треугольники ABM и DCN равны по гипотенузе и острому углу (отрезки AB и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма, углы 1 и 2 равны как соответственные при параллельных прямых AB и DC и секущей AD). Значит, эти треугольники равновелики. Отсюда следует, что параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MBCN$ равновелики.

По теореме 20.1 площадь прямоугольника $MBCN$ равна произведению длин сторон BC и BM. Тогда $S = BC \cdot BM$, где S — площадь параллелограмма $ABCD$.

Для завершения доказательства надо рассмотреть случаи, когда основание M высоты BM не будет принадлежать стороне AD (рис. 215) или совпадет с вершиной D (рис. 216). И в этом случае параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MBCN$ будут равновеликими. Докажите этот факт самостоятельно. ▲

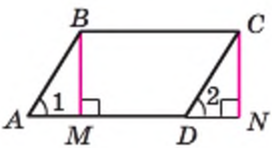


Рис. 214

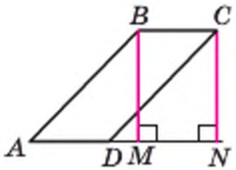


Рис. 215

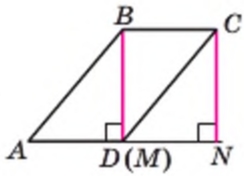


Рис. 216

Если обозначить длины стороны параллелограмма и проведенной к ней высоты соответственно буквами a и h, то площадь S параллелограмма вычисляют по формуле

$$\boxed{S = ah}$$

1. Чему равна площадь параллелограмма?
2. По какой формуле вычисляют площадь параллелограмма?

УПРАЖНЕНИЯ

697.° Найдите площадь параллелограмма, сторона которого равна 14 см, а проведенная к ней высота — 6 см.

698.° Вычислите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке 217 (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 217

699.° Какие из параллелограммов, изображенных на рисунке 218, равновелики?

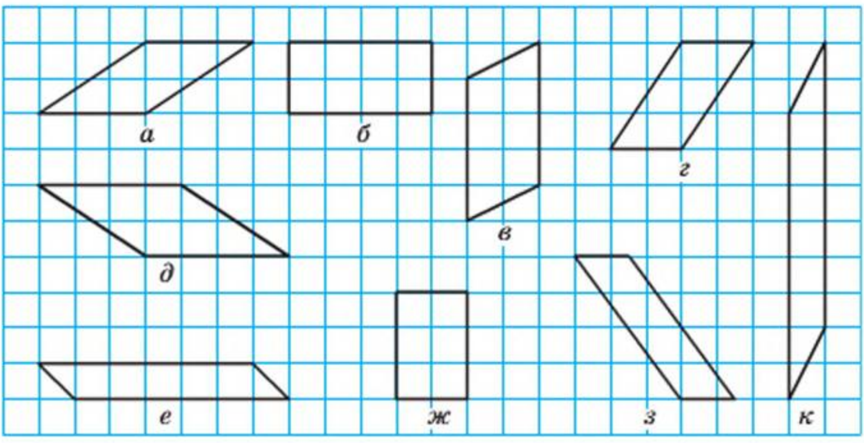


Рис. 218

700.° Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 219) равна S. Чему равна площадь закрашенной фигуры?

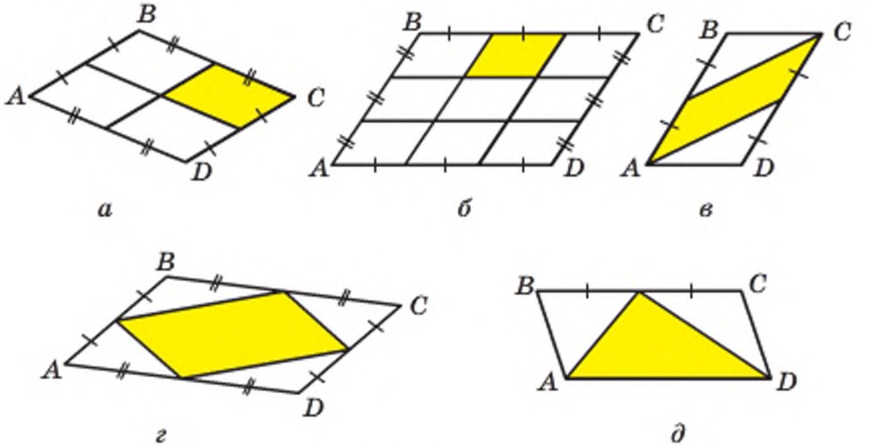


Рис. 219

701.° Площадь параллелограмма равна 17 см², а одна из его сторон — 3,4 см. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к этой стороне.

702.° Площадь параллелограмма равна 40 см², а высоты равны 5 см и 4 см. Найдите стороны этого параллелограмма.

703.° Заполните таблицу, где a — длина стороны параллелограмма, h — длина высоты, проведенной к этой стороне, S — площадь параллелограмма:

a	6,2 см	16 дм	
h	7 см		0,9 м
S		64 дм²	5,4 м²

704.• Стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см, а одна из высот равна: 1) 6 см; 2) 12 см. Найдите другую высоту параллелограмма. Сколько решений в каждом случае имеет задача?

705.• Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 15 см и 25 см, а одна из диагоналей перпендикулярна меньшей стороне.

706.• Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны 26 см и 24 см, а одна из них перпендикулярна стороне параллелограмма.

707.• Диагональ параллелограмма, равная 18 см, перпендикулярна одной из сторон и образует угол 30° с другой стороной. Найдите площадь параллелограмма.

708.• Стороны параллелограмма равны a и b, его острый угол равен α. Найдите площадь параллелограмма.

709.• Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен 60°. Найдите площадь параллелограмма, если его высоты равны 8 см и 12 см.

710.• Стороны параллелограмма равны 14 см и 20 см, а угол между его высотами, проведенными из вершины тупого угла, — 45°. Найдите площадь параллелограмма.

711.• Найдите площадь ромба, если его высота равна 6 см, а большая диагональ — 10 см.

712.• Меньшая диагональ ромба равна a, а один из углов — 60°. Найдите площадь ромба.

713.• Докажите, что высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

714.• Стороны параллелограмма равны 9 см и 12 см, а сумма двух его неравных высот равна 14 см. Найдите площадь параллелограмма.

715.• Разность двух сторон параллелограмма равна 12 см, а проведенные к ним высоты равны 15 см и 10 см. Найдите площадь параллелограмма.

716.•• Докажите, что из всех параллелограммов со сторонами a и b наибольшую площадь имеет прямоугольник.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

717. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см, AM — биссектриса. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов BAC и AMC.

718. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AM и CK пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный, и найдите его боковые стороны, если $AM = 21$ см.

719. На медиане AM треугольника ABC отметили точку D так, что $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AC. В каком отношении эта прямая делит сторону BC, считая от вершины C?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

720. Докажите, что в выпуклом девятиугольнике найдутся две диагонали, угол между которыми меньше 7°.

22. Площадь треугольника

Теорема 22.1. ***Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведенной к ней высоты.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 220 изображены треугольник ABC, площадь которого равна S, и его высота BM. Докажем, что $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

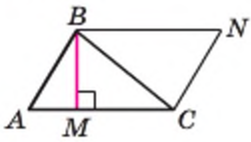


Рис. 220

Через вершины B и C треугольника проведем прямые, параллельные сторонам AC и AB соответственно (рис. 220). Пусть эти прямые пересекаются в точке N. Четырехугольник $ABNC$ — параллелограмм по определению. Треугольники ABC и NCB равны (докажите это самостоятельно). Следовательно, равны и их площади. Тогда площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABNC$. Высота BM треугольника ABC является также высотой параллелограмма $ABNC$. Отсюда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$. ▲

Если воспользоваться обозначениями для высот и сторон треугольника ABC, то согласно доказанной теореме имеем:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

где S — площадь треугольника.

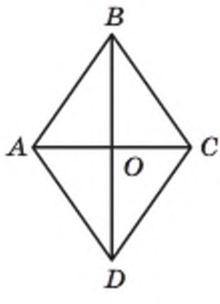


Рис. 221

Следствие. ***Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.***

Докажите эту теорему самостоятельно.

Задача. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Решение. На рисунке 221 изображен ромб $ABCD$, площадь которого равна S. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажем, что $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, то отрезки AO и CO являются высотами треугольников BAD и BCD соответственно. Тогда можно записать:

$S = S_{BAD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AO + \frac{1}{2} BD \cdot CO = \frac{1}{2} BD\ (AO + CO) = \frac{1}{2}$
$BD \cdot AC$. ●

1. Как найти площадь треугольника, если известны его сторона и высота, проведенная к ней?
2. Как найти площадь прямоугольного треугольника, если известны его катеты?

УПРАЖНЕНИЯ

721.° Сторона треугольника равна 12 см, а проведенная к ней высота — 2,5 см. Найдите площадь треугольника.

722.° Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 10 см и 18 см.

723.° Какие из треугольников, изображенных на рисунке 222, равновелики?

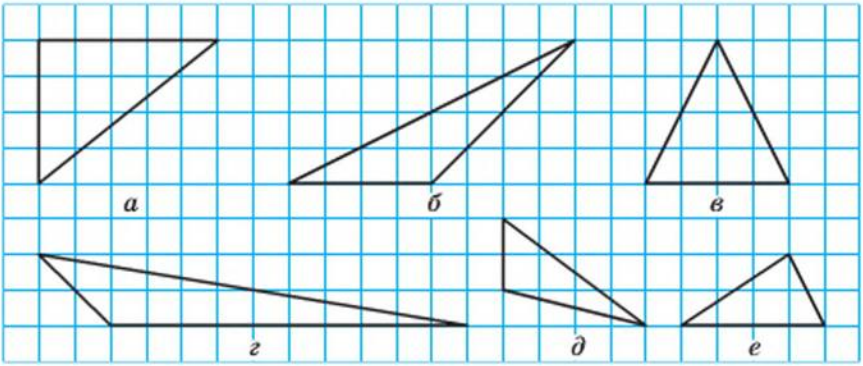


Рис. 222

724.° Вычислите площади треугольников, изображенных на рисунке 223, если длина стороны клетки равна единице длины.

725.° Площадь треугольника равна 48 см². Найдите сторону треугольника, если высота, проведенная к этой стороне, равна 8 см.

726.° Известно, что две стороны треугольника равны 24 см и 9 см, а высота, проведенная к большей из известных сторон, — 6 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к меньшей из известных сторон.

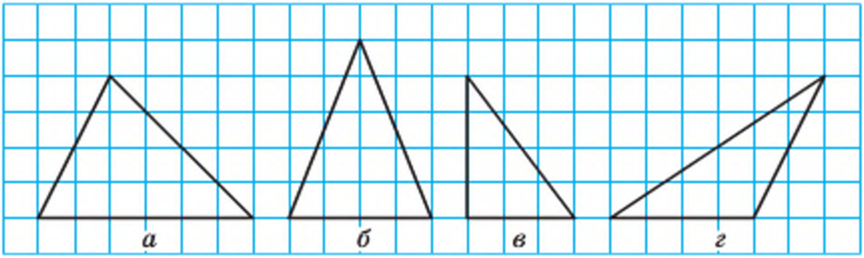


Рис. 223

727.° Заполните таблицу, где a — длина стороны треугольника, h — длина высоты, проведенной к ней, S — площадь треугольника:

a	2,4 см	9 дм	
h	4 см		5 м
S		81 дм^2	65 м^2

728.° Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 24 см, а боковая сторона — 13 см.

729.° Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 61 см, а высота, проведенная к основанию, — 60 см. Найдите площадь треугольника.

730.° Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а медиана, проведенная к гипотенузе, — 18,5 см. Найдите площадь треугольника.

731.• Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки длиной 3 см и 27 см.

732.• Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 8 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу — 6 см. Найдите площадь треугольника.

733.• Высота BD треугольника ABC делит его сторону AC на отрезки AD и CD. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

734.• Высота AM треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BM и MC. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

735.° Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна b, а угол при основании равен α.

736.° Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна h, а угол при вершине равен β. Найдите площадь треугольника.

737.° Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна a.

738.° Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c.

739.° Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если его катеты равны 10 см и 24 см.

740.° Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки длиной 8 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

741.° Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его периметр равен 54 см, а высота, проведенная к основанию, — 9 см.

742.° Основание равнобедренного треугольника относится к его высоте, опущенной на основание, как 8 : 3, боковая сторона треугольника равна 40 см. Найдите площадь треугольника.

743.° Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине их произведения.

744.° Площадь ромба равна 120 см^2, а его диагонали относятся как 5 : 12. Найдите периметр ромба.

745.° Найдите площадь ромба, сторона которого равна 25 см, а сумма диагоналей — 62 см.

746.° Найдите площадь ромба, сторона которого равна 39 см, а разность диагоналей — 42 см.

747.° Даны прямая l и параллельный ей отрезок AB. Докажите, что все треугольники AXB, где X — произвольная точка прямой l, равновелики.

748.° Докажите, что если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника, то площади данных треугольников относятся как их стороны, к которым проведены эти высоты.

749.° Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

750.° На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Докажите, что $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{m}{n}$.

751.• В треугольнике провели все три медианы. Докажите, что они разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

752.• Через вершину B треугольника ABC проведите две прямые так, чтобы они разбили данный треугольник на три равновеликих треугольника.

753.• Через вершину параллелограмма проведите прямые так, чтобы они разбили данный параллелограмм: 1) на четыре равновеликих многоугольника; 2) на пять равновеликих многоугольников.

754.• Через вершину ромба проведите две прямые так, чтобы они разбили данный ромб на три равновеликих многоугольника.

755.• Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму.

756.• В треугольнике проведены три высоты. Докажите, что к наибольшей стороне треугольника проведена наименьшая высота.

757.•• На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Пусть X — произвольная внутренняя точка отрезка BM. Докажите, что $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}}=\frac{m}{n}$.

758.•• Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки, один из которых на 14 см больше другого. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

759.•• В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CM. Площадь треугольника ACM равна 6 см^2, а площадь треугольника BCM — 54 см^2. Найдите стороны треугольника ABC.

760.•• Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса его острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 21 см и 35 см.

761.•• Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 2 см и 6 см.

762.•• Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведенную к основанию, на отрезки, длины которых равны 34 см и 16 см. Найдите площадь данного треугольника.

763.** В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону треугольника в отношении 9 : 8, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 16 см.

764.* На продолжениях сторон AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC за точки B, C и A соответственно отметили точки D, E и F так, что $BD = CE = AF = 2AB$. Найдите площадь треугольника DEF, если площадь треугольника ABC равна 1 см^2.

765.* В треугольнике ABC отметили точку M так, что площади треугольников AMB, BMC и AMC равны. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

766.* На стороне AC треугольника ABC отметили точку D. Проведите через эту точку прямую так, чтобы она разбила данный треугольник на два равновеликих многоугольника.

767.* Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон является постоянной для данного треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

768. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle AMB = 117°$.

769. В равнобокой трапеции основания равны 18 см и 12 см. Боковая сторона образует с основанием угол 30°. Найдите диагональ трапеции.

770. Центр окружности, вписанной в равнобокую трапецию, удален от концов ее боковой стороны на 12 см и 16 см. Найдите периметр трапеции.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

771. На плоскости даны n точек ($n > 3$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в данных точках, который не содержит ни одной из остальных ($n - 3$) точек.

23. Площадь трапеции

Теорема 23.1. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований и высоты.***

Доказательство. На рисунке 224 изображена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площадь которой равна S. Отрезок CN — высота этой трапеции. Докажем, что $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.

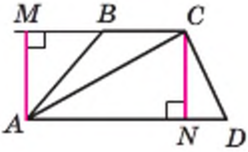


Рис. 224

Проведем диагональ AC и высоту AM трапеции. Отрезки AM и CN являются высотами треугольников ABC и ACD соответственно.

Имеем:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} BC \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot CN + \frac{1}{2} AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \ \blacktriangle$$

Если обозначить длины оснований трапеции и ее высоты соответственно буквами a, b и h, то площадь S трапеции вычисляют по формуле

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$

Следствие. ***Площадь трапеции равна произведению ее средней линии и высоты.***

1. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
2. По какой формуле вычисляют площадь трапеции?

УПРАЖНЕНИЯ

772.° Найдите площадь трапеции, основания которой равны 7 см и 12 см, а высота — 6 см.

773.° Найдите площадь трапеции, средняя линия которой равна 18 см, а высота — 9 см.

774.° Площадь трапеции равна 96 см^2, а ее высота — 3 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 3 : 5.

775.° Площадь трапеции равна 45 см², одно из оснований — 8 см, а высота — 6 см. Найдите другое основание трапеции.

776.° Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 16 см, а диагональ — 17 см.

777.° Чему равна площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 9 см и 16 см, а бо́льшая боковая сторона — $\sqrt{65}$ см?

778.° Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 32 см, а боковая сторона — 15 см.

779.° На рисунке 225 изображено поперечное сечение траншеи, имеющее форму трапеции. Вычислите площадь этого поперечного сечения (размеры даны в метрах).

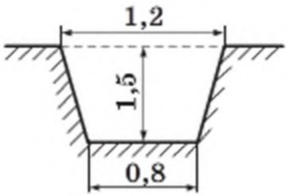


Рис. 225

780.° Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке 226 (длины отрезков даны в сантиметрах).

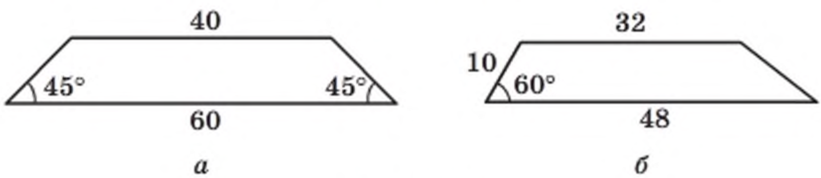


Рис. 226

781.° Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке 227 (длины отрезков даны в сантиметрах).

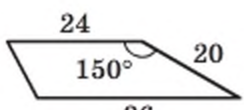


Рис. 227

782.• В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 6 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

783.• Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 17 см, а диагональ является биссектрисой ее тупого угла. Вычислите площадь трапеции.

784.• Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 17 см и 25 см, а высота — 15 см.

785.° Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 10 см и 17 см, а высота — 8 см.

786.° Боковая сторона равнобокой трапеции равна $20\sqrt{3}$ см и образует с основанием угол 60°. Найдите площадь трапеции, если в нее можно вписать окружность.

787.° Основания равнобокой трапеции равны 32 см и 50 см. Чему равна площадь трапеции, если в нее можно вписать окружность?

788.° Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 8 см, а острый угол — 45°. Найдите площадь трапеции, если в нее можно вписать окружность.

789.° Бо́льшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 28 см, а острый угол — 30°. Найдите площадь трапеции, если в нее можно вписать окружность.

790.° Докажите, что прямая, которая проходит через середину средней линии трапеции и пересекает ее основания, разбивает данную трапецию на два равновеликих многоугольника.

791.° Постройте равновеликий данной трапеции:

1) параллелограмм, отличный от прямоугольника;

2) прямоугольник.

792.° Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.

793.°° Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 24 см и 40 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

794.°° Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, которая равна 15 см. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности, описанной около нее, равен 12,5 см.

795.°° Диагонали трапеции перпендикулярны, одна из них равна 48 см, а средняя линия трапеции — 25 см. Найдите площадь трапеции.

796.°° Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой ее острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно a.

797.°° В равнобокую трапецию вписана окружность. Одна из ее боковых сторон точкой касания делится на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

798.•• В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 12 см. Бо́льшая из боковых сторон точкой касания делится на два отрезка, больший из которых равен 16 см. Найдите площадь трапеции.

799.•• Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

800.•• Бо́льшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 9 см. Бо́льшая боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

801.•• В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, точка M — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CMD, если площадь данной трапеции равна S.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

802. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, а периметр треугольника ABD — 40 см. Найдите стороны параллелограмма, если $AD = BD$.

803. Окружность, построенная на диагонали AC ромба $ABCD$ как на диаметре, проходит через середину стороны AB. Найдите углы ромба.

804. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M, K и D так, что $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Найдите периметр четырехугольника $AMKD$, если $AC = 15$ см, $AB = 25$ см.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

805. Можно ли квадрат со стороной 1,5 см накрыть тремя квадратами со стороной 1 см?

РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ И РАВНОВЕЛИКИЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Если некоторый многоугольник можно разре́зать на части и составить из них другой многоугольник, то такие два многоугольника называют **равносоставленными**.

Например, если прямоугольник разрезать вдоль его диагонали (рис. 228), то получим два равных прямоугольных треугольника, из которых можно составить равнобедренный треугольник (рис. 229). Фигуры на рисунках 228 и 229 — равносоставленные.

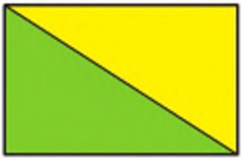


Рис. 228

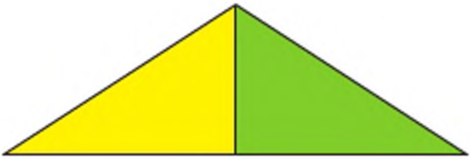


Рис. 229

Очевидно, что равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Этот факт применяют при доказательстве теорем и решении задач. Например, доказывая теорему 21.1, мы фактически разрезали параллелограмм на треугольник ABM и трапецию $MBCD$, из которых составили прямоугольник $MBCN$ (см. рис. 215).

Если треугольник разрезать вдоль средней линии, то из полученных треугольника и трапеции можно составить параллелограмм (рис. 230).

Легко установить (сделайте это самостоятельно), что такое разрезание треугольника приводит к еще одному доказательству теоремы о площади треугольника (теорема 22.1). Этой же цели служит разрезание треугольника на части, из которых можно составить прямоугольник (рис. 231).

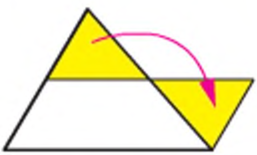


Рис. 230

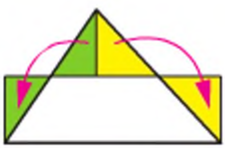


Рис. 231

Евклид в своей знаменитой книге «Начала» формулирует теорему Пифагора так:

«Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах».

Если показать, что можно разрезать квадраты, построенные на катетах, на части и составить из этих частей квадрат со стороной, равной гипотенузе, то тем самым будет доказана теорема Пифагора.

На рисунке 232 показан один из возможных способов такого разрезания. Квадраты, построенные на катетах, разрезаны на части, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4. Из этих частей сложен квадрат, построенный на гипотенузе.

Из определения площади многоугольника следует, что равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Но совсем неочевидной является такая теорема.

Теорема. ***Любые два равновеликих многоугольника являются равносоставленными.***

Впервые этот факт доказал в 1832 г. венгерский математик Фаркаш Бойяи. Позднее немецкий математик Пауль Гервин нашел другое доказательство. Поэтому эту теорему называют теоремой Бойяи—Гервина.

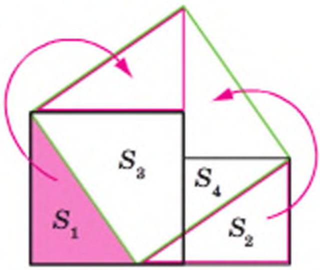


Рис. 232

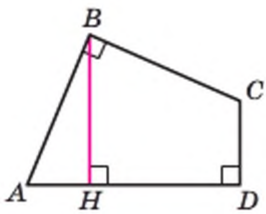


Рис. 233

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что трапеция является равносоставленной с параллелограммом, основание которого равно средней линии трапеции, а высота — высоте трапеции.

2. Докажите, что площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, опущенного на прямую, которая содержит эту сторону, из середины другой боковой стороны.

3. В четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые, а стороны AB и BC равны (рис. 233). Известно, что $BH \perp AD$ и $BH = 1$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

ТЕОРЕМА ЧЕВЫ

На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отметим произвольные точки A_1, B_1, C_1 (рис. 234). Каждый из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 называют **чевианой** треугольника ABC. Такое название связано с именем итальянского инженера и математика Джованни Чевы (1648–1734), открывшего удивительную теорему.

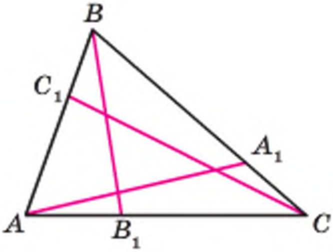


Рис. 234

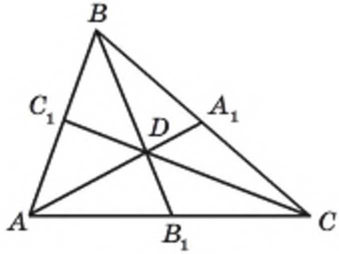


Рис. 235

Если точки A_1, B_1 и C_1 выбраны так, что чевианы являются биссектрисами, либо медианами, либо высотами остроугольного треугольника, то эти чевианы пересекаются в одной точке.

Если три прямые пересекаются в одной точке, то их называют **конкурентными**.

Теорема Чевы дает общий критерий конкурентности произвольных трех чевиан.

Теорема. ***Для того чтобы чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доказательство. Докажем сначала необходимое условие конкурентности: если чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполняется равенство (*).

Воспользовавшись результатом ключевой задачи 757, можно записать (рис. 235):

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}},\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Перемножив записанные равенства, получим равенство (*).

Докажем теперь достаточное условие конкурентности: если выполняется равенство (*), то чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Пусть чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D, а чевиана, проходящая через вершину C и точку D, пересекает сторону AB в некоторой точке C_2. Из доказанного выше можно записать:

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (*), приходим к выводу, что $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$, то есть точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении, а значит, эти точки совпадают. Следовательно, прямая CD пересекает сторону AB в точке C_1. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что:
1) медианы треугольника конкурентны;
2) биссектрисы треугольника конкурентны;
3) высоты остроугольного треугольника конкурентны.

2. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами BC, AC, AB треугольника ABC. Докажите, что чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны.

3. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP соответственно, конкурентны.

Указание. Примените теорему Чевы к треугольнику, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC.

ЗАДАНИЕ № 4 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Сколько сторон в выпуклом n-угольнике, если сумма его углов равна $1260°$?
   А) 7; Б) 9; В) 11; Г) 13.

2. В выпуклом n-угольнике 14 диагоналей. Чему равна сумма его углов?
   А) $1000°$; Б) $800°$; В) $900°$; Г) $720°$.

3. Как изменится площадь прямоугольника, если каждую из его сторон уменьшить в 10 раз?
   А) Уменьшится в 100 раз; В) уменьшится в 10 раз;
   Б) уменьшится в 20 раз; Г) уменьшится в 1000 раз.

4. Площадь параллелограмма равна 80 см^2, а одна из его сторон — 16 см. Какой длины может быть соседняя сторона параллелограмма?
   А) 2 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см.

5. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отметили точку M так, что $BM : MC = 1 : 3$. Чему равна площадь треугольника ABM, если площадь параллелограмма равна S?
   А) $\frac{S}{8}$; В) $\frac{S}{16}$;
   Б) $\frac{S}{4}$; Г) $\frac{S}{2}$.

6. На рисунке 236 площадь каждого из маленьких квадратов равна 4 см^2. Чему равна площадь большого квадрата?
   А) 16 см^2; Б) 20 см^2; В) 32 см^2; Г) 40 см^2.

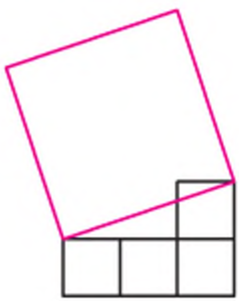


Рис. 236

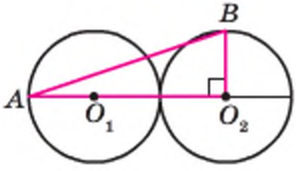


Рис. 237

7. В окружность радиуса 1 см вписаны квадрат и равносторонний треугольник. Чему равно отношение площади данного треугольника к площади квадрата?

А) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; Б) $3\sqrt{3}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

8. Точки O_1 и O_2 — центры равных окружностей, имеющих только одну общую точку (рис. 237), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ см. Чему равна площадь треугольника ABO_2?

А) 10 см²; Б) 15 см²; В) 18 см²; Г) 20 см².

9. Даны две точки A и B. Геометрическим местом точек X таких, что площади треугольников AXB равны данному числу S, является:

А) окружность с диаметром AB;

Б) серединный перпендикуляр отрезка AB;

В) прямая, параллельная AB;

Г) две прямые, параллельные AB.

10. Диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны и делят ее среднюю линию на три равные части. Чему равна площадь трапеции, если ее большее основание равно 12 см?

А) 50 см²; Б) 64 см²; В) 81 см²; Г) 144 см².

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 4

Сумма углов выпуклого n-угольника

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° (n - 2)$.

Окружность, описанная около многоугольника

Окружность называют описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины.

Окружность, вписанная в многоугольник

Окружность называют вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон.

Площадь многоугольника

Площадью многоугольника называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:

1) равные многоугольники имеют равные площади;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;
3) за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, то есть квадрат со стороной, равной единице измерения длины.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон.

Равновеликие многоугольники

Многоугольники, имеющие равные площади, называют равновеликими.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведенной к ней высоты.

Площадь прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Площадь трапеции

- Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований и высоты.
- Площадь трапеции равна произведению ее средней линии и высоты.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

1. Четырехугольники

806. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки длиной 9 см и 14 см.

807. Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 5 : 4$. Найдите стороны параллелограмма, если периметр треугольника BOC на 8 см больше периметра треугольника COD, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

808. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $2\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Найдите угол ADB.

809. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD, касаются диагонали BD в точках M и K соответственно. Найдите отрезок MK.

810. Сколько разных параллелограммов можно составить из двух равных треугольников, если они: 1) разносторонние; 2) равнобедренные; 3) равносторонние?

811. Верно ли утверждение:

1) если диагонали четырехугольника равны, то этот четырехугольник — параллелограмм;
2) если две стороны четырехугольника параллельны и точка пересечения диагоналей равноудалена от этих сторон, то этот четырехугольник — параллелограмм;
3) если две стороны четырехугольника параллельны, а две другие — равны, то этот четырехугольник — параллелограмм;
4) если биссектрисы двух противолежащих углов четырехугольника перпендикулярны биссектрисе его третьего угла, то этот четырехугольник — параллелограмм;
5) если диагональ четырехугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм;
6) если каждая диагональ четырехугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм;

7) если каждые две противолежащие вершины четырехугольника равноудалены от диагонали, соединяющей две другие вершины, то этот четырехугольник — параллелограмм?

812. Верно ли утверждение:

1) если две стороны четырехугольника параллельны, а одна из диагоналей разбивает четырехугольник на два равных треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм;
2) если две стороны четырехугольника параллельны, а точка пересечения диагоналей делит одну из них пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм;
3) если две противолежащие стороны четырехугольника равны и его диагонали равны, то этот четырехугольник — параллелограмм?

813. Периметр ромба равен 8 см, а его высота — 1 см. Найдите углы ромба.

814. Угол при вершине B ромба $ABCD$ равен $40°$, точки M и K — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на стороны BC и CD соответственно. Найдите углы треугольника AMK.

815. Перпендикуляр, опущенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ на диагональ AC, делит угол ABC на два угла, величины которых относятся как $1 : 3$. Найдите угол между проведенным перпендикуляром и диагональю BD.

816. Серединный перпендикуляр диагонали прямоугольника образует с его большей стороной угол $60°$. Отрезок этой прямой, принадлежащий прямоугольнику, равен 12 см. Найдите бо́льшую сторону прямоугольника.

817. На диагонали AC ромба $ABCD$ отметили точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBK$.

818. Периметр ромба на 42 см больше стороны ромба. Найдите периметр ромба.

819. Верно ли утверждение:

1) если диагонали четырехугольника равны, то этот четырехугольник — прямоугольник;
2) если диагонали четырехугольника равны и перпендикулярны, то этот четырехугольник — квадрат;

3) если диагонали четырехугольника перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — квадрат;
4) если диагонали четырехугольника равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — квадрат;
5) если три стороны четырехугольника равны, а диагональ является биссектрисой одного из его углов, то этот четырехугольник — ромб?

В случае утвердительного ответа обоснуйте его, в случае отрицательного — начертите четырехугольник, служащий контрпримером.

820. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки D, F и E соответственно так, что $BD = BF = DE = EF$. Докажите, что точка F принадлежит биссектрисе угла BDE.

821. Расстояние от середины хорды AC окружности до диаметра AB равно 4 см. Найдите хорду BC, если $\angle BAC = 30°$.

822. Постройте параллелограмм по его вершине и серединам сторон, которым эта вершина не принадлежит.

823. Боковая сторона AB и меньшее основание BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 16 см и 15 см. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла BAD — основание BC или боковую сторону CD?

824. Диагональ равнобокой трапеции равна большему основанию и образует с ним угол 40°. Найдите углы трапеции.

825. Угол между двумя секущими, проходящими через точку вне окружности, равен 35°. Градусная мера большей дуги окружности, заключенной между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите градусную меру меньшей дуги, находящейся между сторонами данного угла.

826. Докажите, что если вершина угла лежит вне окружности, а угол опирается на диаметр окружности, то этот угол острый.

827. Докажите, что если вершина угла лежит внутри окружности, а угол опирается на диаметр окружности, то этот угол тупой или развернутый.

828. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, перпендикулярны, $\angle ACB = 10°$, $\angle BDC = 70°$. Найдите углы данного четырехугольника.

2. Подобие треугольников

829. Две параллельные прямые пересекают одну из сторон угла с вершиной M в точках A и C, а другую — соответственно в точках B и D. Найдите отрезки MA и MC, если $MB : BD = 2 : 3$ и $MA + MC = 14$ см.

830. Найдите отношение оснований трапеции, если ее диагонали делят среднюю линию трапеции на три равные части.

831. На медиане BD треугольника ABC отметили точку M так, что $BM : MD = 3 : 2$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. В каком отношении точка E делит сторону BC, считая от вершины B?

832. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках E и F соответственно, $BE : ED = 2 : 7$. Найдите отношение $BF : FC$.

833. Медианы AD и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, которая параллельна стороне AC и пересекает сторону BC в точке K. Найдите отрезки BD, DK и KC, если $BC = 18$ см.

834. Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и DC, длины которых относятся как $3 : 5$. Найдите стороны AB и BC, если их сумма равна 56 см.

835. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, составляет $\frac{2}{9}$ высоты, проведенной к основанию треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 72 см.

836. Стороны треугольника равны 2,5 см, 4,5 см и 6 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если его бо́льшая сторона равна 24 см.

837. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E принадлежит стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = a$, $AC = b$.

838. Периметр параллелограмма равен 72 см, а его высоты относятся как $5 : 7$. Найдите стороны параллелограмма.

839. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Проведите прямую, равноудаленную от этих точек. Сколько решений имеет задача?

840. Прямая MB пересекает окружность в точках A и B (точка A лежит между точками M и B), а прямая MD — в точках C и D (точка C лежит между точками M и D). Известно, что $AB = MC$, $MA = 20$ см, $CD = 11$ см. Найдите отрезок AB.

841. Прямая AB касается окружности в точке B, а прямая AC пересекает окружность в точках C и D (точка D лежит между точками A и C). Найдите отрезок CD, если $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

842. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $CM = 4$ см, $DM = 6$ см, отрезок AM на 2 см больше отрезка BM. Найдите хорду AB.

843. На одной стороне угла с вершиной в точке A отметили точки B и C, а на другой — точки D и E, причем $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Найдите отрезок CE, если $BD = 20$ см.

3. Решение прямоугольных треугольников

844. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 10 см, а расстояние между серединой гипотенузы и основанием высоты треугольника, проведенной к гипотенузе, равно 6 см. Найдите периметр данного треугольника.

845. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, а высота, проведенная к основанию, на 6 см меньше основания. Найдите основание треугольника.

846. Из точки K, лежащей вне прямой a, проведены к этой прямой наклонные KA и KB, которые образуют с ней углы 45° и 30° соответственно. Найдите проекцию наклонной KB на прямую a, если $KA = 8\sqrt{6}$ см.

847. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, делит ее на отрезки длиной 4 см и 25 см. Найдите диагонали ромба.

848. Окружность, центр которой принадлежит гипотенузе прямоугольного треугольника, касается большего катета и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 см и 12 см.

849. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние от вершины меньшего острого угла треугольника до центра вписанной окружности.

850. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на ее диаметр, делит диаметр на два отрезка, один из которых на 27 см больше другого. Найдите диаметр окружности, если длина перпендикуляра равна 18 см.

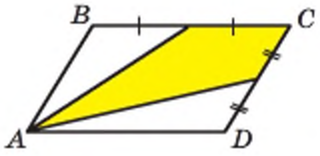
4. Многоугольники. Площадь многоугольника

851. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найдите площадь закрашенной фигуры (рис. 238).

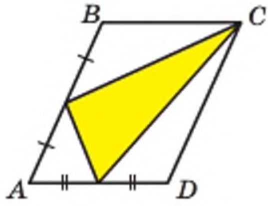
852. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BD \perp AD$, $BD = 16$ см, $\angle A = 45°$.

853. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна d.

854. Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен R.



а



б

Рис. 238

855. Катет прямоугольного треугольника равен b, а противолежащий ему угол равен β. Найдите площадь треугольника.

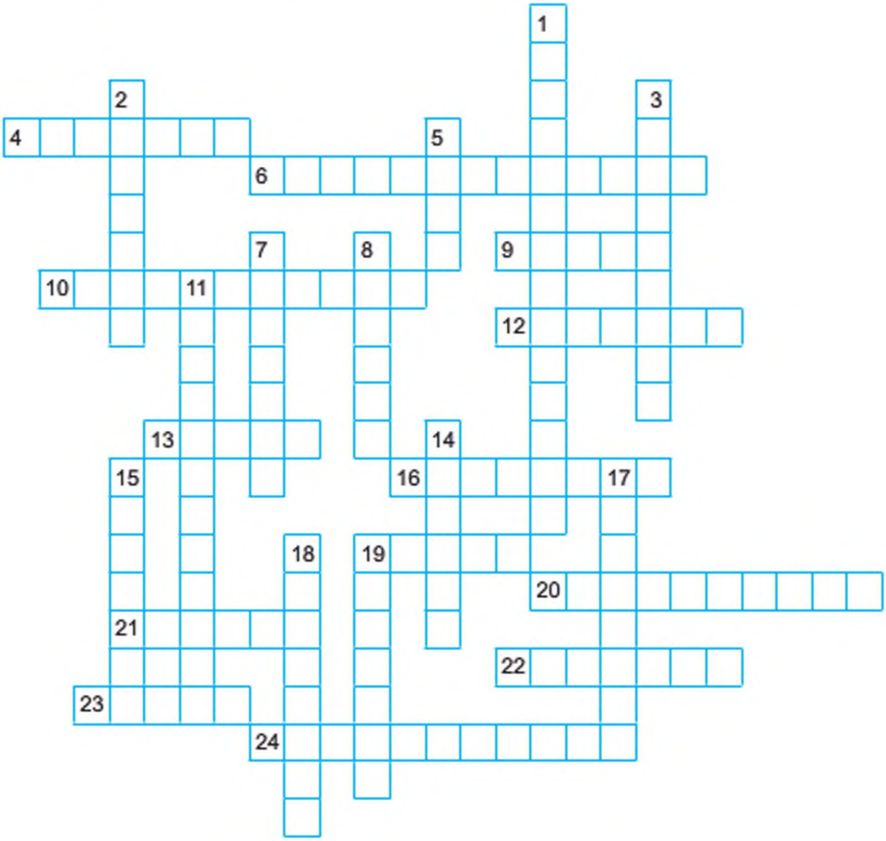
856. Острый угол прямоугольного треугольника равен α, а гипотенуза равна c. Найдите площадь треугольника.

857. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 15 см, а высота — $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 150°.

858. Диагонали равнобокой трапеции являются биссектрисами ее острых углов и точкой пересечения делятся в отношении 5 : 13. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 90 см.

859. Площадь равнобокой трапеции равна $36\sqrt{2}$ см², а острый угол — 45°. Найдите высоту трапеции, если в нее можно вписать окружность.

860. **Разгадайте кроссворд:**



По горизонтали: **4.** Древнегреческий ученый. **6.** Один из видов параллелограмма. **9.** Вспомогательная теорема. **10.** Угол, вершиной которого является центр окружности. **12.** Отношение катета, прилежащего к острому углу прямоугольного треугольника, к его гипотенузе. **13.** Отрезок, соединяющий две точки окружности. **16.** Сумма сторон многоугольника. **19.** Сторона прямоугольного треугольника. **20.** Сторона прямоугольного треугольника, квадрат которой равен сумме квадратов двух других его сторон. **21.** Автор книги «Начала». **22.** Сотая доля числа. **23.** Древнегреческий философ. **24.** Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку.

По вертикали: **1.** Вид четырехугольника. **2.** Отношение катета, противолежащего острому углу прямоугольного треугольника, к прилежащему катету. **3.** Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность. **5.** Одна из частей окружности, на которые ее разбивают две точки. **7.** Величина. **8.** Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону. **11.** Многоугольники, имеющие равные площади. **14.** Одна из частей круга, на которые его разбивают два радиуса. **15.** Утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства. **17.** Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. **18.** Одна из декартовых координат точки. **19.** Прямоугольник, у которого все стороны равны.

ДРУЖИМ С КОМПЬЮТЕРОМ

В 7 классе вы уже использовали компьютер при изучении геометрии. В 8 классе вы будете изучать более сложные геометрические фигуры, а значит, сможете усовершенствовать свои умения, освоив более сложные инструменты графических пакетов.

Напомним, что, кроме заданий, приведенных в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные специально для освоения школьного курса геометрии. Вы можете обращаться к глобальной сети Интернет для поиска таких программ и другой нужной вам информации.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство из них — задания на построение геометрических фигур, для которых вы будете использовать графический редактор. Кроме этих заданий, вы можете выполнять рисунки к задачам, в частности из рубрики «Практические задания», а также решать задачи на построение не только в тетради, но и с помощью компьютера. В 7 классе вы узнали, что в геометрии построения выполняют с помощью линейки и циркуля. Поэтому для решения задач на построение вам нужно найти среди инструментов графического редактора те, которые выполняют функции линейки и циркуля.

1. Четырехугольник и его элементы

1. Постройте четырехугольники, иллюстрирующие теоретические сведения этого пункта.

2. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

2. Определите, какие свойства параллелограмма надо использовать, чтобы правильно изобразить эту фигуру. Какие инструменты графического редактора надо для этого применить? Нарисуйте параллелограмм и постройте две его высоты, выходящие из одной вершины. Какой инструмент вы используете, чтобы опустить высоту на данную сторону?

3. Признаки параллелограмма

3. Представьте себе, что нарисован четырехугольник. Каким образом вы можете проверить, является ли он параллелограммом? Какие инструменты графического пакета можно для этого использовать?

4. Прямоугольник

4. Найдите в графическом редакторе средство, которое позволяет быстро строить различные прямоугольники.

5. Ромб

5. Какое свойство ромба позволяет быстро и правильно построить ромб?
6. Постройте два перпендикулярных пересекающихся отрезка. Представьте себе, что это диагонали четырехугольника, и постройте этот четырехугольник. Обязательно ли получится ромб? Каким условием надо дополнить это задание, чтобы полученный четырехугольник обязательно оказался ромбом?

6. Квадрат

7. Найдите в графическом редакторе средство, которое позволяет быстро строить различные квадраты.

7. Средняя линия треугольника

8. Какой инструмент графического редактора вы будете использовать, чтобы найти середину отрезка?
9. Нарисуйте произвольный четырехугольник. Выполните построение, которое проиллюстрирует ключевую задачу п. 7. Как вы проверите, что отрезки, соединяющие середины сторон данного четырехугольника, образовали параллелограмм?

8. Трапеция

10. Постройте трапецию. Какие инструменты графического редактора вы будете использовать, чтобы обеспечить параллельность сторон трапеции? чтобы построить равнобокую трапецию? чтобы построить прямоугольную трапецию?

9. Центральные и вписанные углы

11. Нарисуйте окружность и постройте несколько вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Пользуясь инструментами графического редактора, определите их градусные меры.
12. Нарисуйте окружность, постройте центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Проверьте, как соотносятся величины этих углов.

10. Описанная и вписанная окружности четырехугольника

13. Найдите оптимальный способ построения рисунков, на которых должны быть изображены окружность, вписанные в окружность и описанные около окружности четырехугольники. Какое свойство касательной к окружности позволяет правильно изобразить описанный четырехугольник?

11. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

14. Постройте рисунки, иллюстрирующие теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках. Измерьте длины нужных отрезков и проверьте, выполняются ли для них утверждения этих теорем. Насколько точно можно измерить отрезки средствами графического редактора, которым вы пользуетесь?
15. Представьте себе, что в вашем графическом редакторе нет инструмента, позволяющего строить параллельные прямые. Как вы можете построить параллельные прямые, используя теорему Фалеса?

12. Подобные треугольники

16. Освойте инструменты графического редактора, которые позволяют изображать фигуры, имеющие одинаковую форму, но разные размеры. Постройте с помощью этих инструментов подобные треугольники.
17. Постройте графическую иллюстрацию к лемме о подобных треугольниках. Пользуясь указанными инструментами, покажите, что изображенные треугольники действительно подобны.

13. Первый признак подобия треугольников

18. Постройте два отрезка различной длины. Представьте себе, что это соответственные стороны подобных треугольников. Используя первый из этих отрезков в качестве стороны, постройте произвольный треугольник. Постройте подобный ему треугольник, используя второй отрезок в качестве стороны; примените для этого первый признак подобия треугольников.

14. Второй и третий признаки подобия треугольников

19. Придумайте самостоятельно и выполните задание, которое позволило бы с помощью компьютера продемонстрировать второй и третий признаки подобия треугольников.

15. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

20. Постройте прямоугольный треугольник и опустите высоту на гипотенузу. Убедитесь, что выполняется лемма п. 15.

16. Теорема Пифагора

21. Часто теорему Пифагора иллюстрируют, построив квадраты на сторонах прямоугольного треугольника. Многие поколения школьников называют этот рисунок «Пифагоровы штаны» и формулируют теорему в шутливой форме: «Пифагоровы штаны на все стороны равны». Постройте этот рисунок.
22. Есть ли в графическом редакторе инструмент для разрезания фигуры на части, которыми далее можно оперировать отдельно?
23. Разрезав на части квадраты, построенные на катетах, можно сложить из этих частей квадрат, построенный на гипотенузе. Для произвольного треугольника поиск таких частей — задача непростая. А вот для равнобедренного треугольника найти такой способ разрезания довольно легко. Какие это части? Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник. Постройте такой набор фигур, чтобы, перемещая их, можно было составить либо квадрат, построенный на гипотенузе, либо два квадрата, построенных на катетах.

17. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

24. Освойте инструменты калькулятора, позволяющие находить тригонометрические функции острого угла треугольника.
25. В языке программирования, который вы изучаете, найдите инструменты для вычисления значений тригонометрических функций.

18. Решение прямоугольных треугольников

26. При решении задач этого пункта используйте калькулятор для вычислений.

19. Многоугольники

27. Сформулируйте какой-нибудь набор свойств многоугольника (количество сторон, выпуклость, вписанный в окружность, описанный около окружности и т. п.). Постройте многоугольник, обладающий этим набором свойств. Какими инструментами графического редактора надо воспользоваться, чтобы обеспечить выполнение заданных свойств?

20. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

28. Постройте квадрат и примите его за единичный. Скопируйте его несколько раз. Из полученных единичных квадратов сложите несколько различных равновеликих прямоугольников.

21. Площадь параллелограмма

29. Создайте набор фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать доказательство теоремы о площади параллелограмма. Каким свойством площади многоугольника мы при этом пользуемся?
30. Теорема 21.1 справедлива независимо от того, какую из сторон параллелограмма с опущенной на нее высотой выбрать для вычисления площади. Создайте набор фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать это утверждение.

22. Площадь треугольника

31. Создайте наборы фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать доказательства утверждений теоретической части этого пункта.

23. Площадь трапеции

32. Постройте произвольную трапецию. Разрежьте ее на части так, чтобы показать, что формула для вычисления площади трапеции является верной.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

Простейшие геометрические фигуры и их свойства

1. Точки и прямые

- *Основное свойство прямой*. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.
- Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.
- Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

2. Отрезок и его длина

- Точки A и B прямой a (рис. 239) ограничивают часть прямой, которую вместе с точками A и B называют отрезком, а точки A и B — концами этого отрезка.
- Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.
- Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.
- *Основное свойство длины отрезка*. Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, то есть $AB = AC + CB$.
- Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то считают, что расстояние между ними равно нулю.

Рис. 239

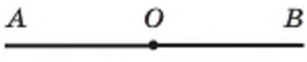


Рис. 240

- **3. Луч. Угол**
- Точка O прямой AB (рис. 240) разбивает прямую на две части, каждую из которых вместе с точкой O называют лучом или полупрямой. Точку O называют началом луча.
- Два луча, имеющих общее начало и лежащих на одной прямой, называют дополнительными.

- Два луча OA и OB, имеющие общее начало (рис. 241), разбивают плоскость на две части, каждую из которых вместе с лучами OA и OB называют углом. Лучи OA и OB называют сторонами угла, а точку O — вершиной угла.
- Угол, сторонами которого являются дополнительные лучи, называют развернутым.
- Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.
- Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

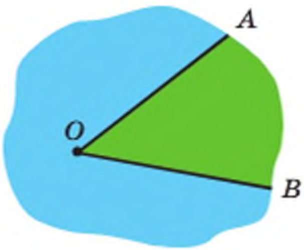


Рис. 241

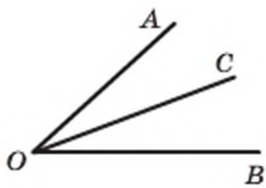


Рис. 242

4. Измерение углов

- Каждый угол имеет определенную величину (градусную меру).
- Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым. Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым. Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым.
- Равные углы имеют равные величины, и наоборот, если величины углов равны, то равны и сами углы.
- *Основное свойство величины угла*. Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB (рис. 242), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

5. Смежные и вертикальные углы

- Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.
- Сумма смежных углов равна 180°.

- Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.
- Вертикальные углы равны.

6. Перпендикулярные прямые. Серединный перпендикуляр

- Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.
- Неперпендикулярные прямые при пересечении образуют пару равных острых углов и пару равных тупых углов. Величину острого угла называют углом между неперпендикулярными прямыми.
- Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен $90°$.
- Два отрезка называют перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.
- На рисунке 243 изображены прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB, конец B которого принадлежит прямой a. В таком случае говорят, что из точки A на прямую a опущен перпендикуляр AB. Точку B называют основанием перпендикуляра AB.

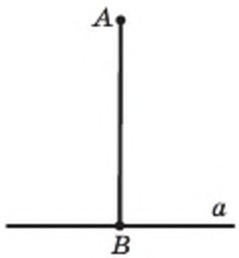


Рис. 243

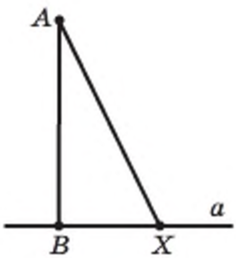


Рис. 244

- Длину перпендикуляра AB называют расстоянием от точки A до прямой a. Если точка A принадлежит прямой a, то считают, что расстояние от точки A до прямой a равно нулю.
- Опустим из точки A на прямую a перпендикуляр AB (рис. 244). Пусть X — произвольная точка прямой a, отличная от точки B. Отрезок AX называют наклонной, проведенной из точки A к прямой a.
- Через данную точку проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

- Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.
- Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.
- Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

Треугольники

7. Треугольник и его элементы. Равные треугольники

- Три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, соединены отрезками (рис. 245). Образовавшаяся фигура ограничивает часть плоскости, которую вместе с отрезками AB, BC и CA называют треугольником. Точки A, B, C называют вершинами, а отрезки AB, BC, CA — сторонами треугольника.

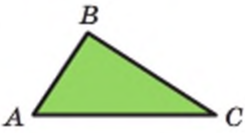


Рис. 245

- Треугольник называют и обозначают по его вершинам.
- В треугольнике ABC угол B называют углом, противолежащим стороне AC, а углы A и C — углами, прилежащими к стороне AC.
- Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон.
- Треугольник называют остроугольным, если все его углы острые; прямоугольным, если один из его углов прямой; тупоугольным, если один из его углов тупой.
- Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, — катетами.
- *Неравенство треугольника.* Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.
- Два треугольника называют равными, если их можно совместить наложением. Те пары сторон и углов, которые совмещаются при наложении равных треугольников, называют соответственными сторонами и соответственными углами.
- В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
- В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бо́льшая сторона.

8. Высота, медиана, биссектриса треугольника

- Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.
- Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.
- Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

9. Признаки равенства треугольников

- *Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.* Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
- *Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам.* Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- *Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.* Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

10. Равнобедренный треугольник и его свойства. Равносторонний треугольник

- Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.
- Равные стороны треугольника называют боковыми сторонами, а третью сторону — основанием равнобедренного треугольника.
- Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон.

- В равнобедренном треугольнике:
  1) углы при основании равны;
  2) биссектриса треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и высотой треугольника.
- Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.
- В равностороннем треугольнике:
  1) все углы равны;
  2) биссектриса, высота и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают.

11. Признаки равнобедренного треугольника

- Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

12. Параллельные прямые

- Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются.
- *Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых).* Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.
- Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.
- Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
- Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

13. Признаки параллельности двух прямых

- ✓ Если две прямые a и b пересечь третьей прямой c, то образуется восемь углов (рис. 246). Прямую c называют секущей прямых a и b.

  Углы 3 и 6, 4 и 5 называют односторонними.

  Углы 3 и 5, 4 и 6 называют накрест лежащими.

  Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют соответственными.

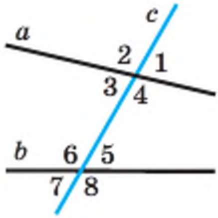


Рис. 246

- ✓ Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.
- ✓ Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.
- ✓ Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

14. Свойства параллельных прямых

- ✓ Если две параллельные прямые пересекаются секущей, то:
  - углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны;
  - углы, образующие пару соответственных углов, равны;
  - сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.
- ✓ Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

15. Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника

- ✓ Сумма углов треугольника равна 180°.
- ✓ Среди углов треугольника по крайней мере два угла острые.
- ✓ Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.
- ✓ Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
- ✓ Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

16. Признаки равенства прямоугольных треугольников

- *Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету*. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам*. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу*. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу*. Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу*. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

17. Свойства прямоугольного треугольника

- В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
- Катет, лежащий против угла, величина которого равна $30°$, равен половине гипотенузы.
- Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен $30°$.

Окружность и круг

18. Геометрическое место точек

- Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определенным свойством.

- Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка.
- Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон.

19. Окружность и круг, их элементы

- Окружностью называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу. Данную точку называют центром окружности.
- Любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называют радиусом окружности.
- Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой окружности. Хорду, проходящую через центр окружности, называют диаметром.
- Диаметр окружности в два раза больше ее радиуса.
- Кругом называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки не больше данного положительного числа. Заданную точку называют центром круга. Радиус окружности, ограничивающей круг, называют радиусом круга. Если X — произвольная точка круга с центром O и радиусом R, то $OX \leqslant R$.
- Окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.
- Хорда и диаметр круга — это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

20. Свойства окружности

- Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.
- Диаметр окружности, который делит хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

21. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности

- Прямая и окружность могут не иметь общих точек, иметь две общие точки или иметь одну общую точку.

- Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.
- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
- Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.
- Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.
- Если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

22. Описанная и вписанная окружности треугольника

- Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.
  На рисунке 247 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что треугольник вписан в окружность.

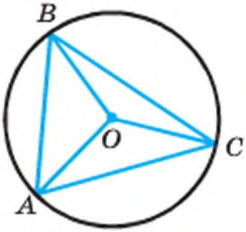


Рис. 247

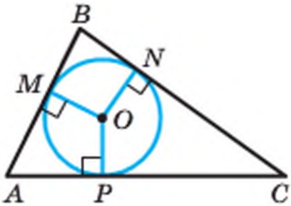


Рис. 248

- Центр описанной окружности треугольника равноудален от всех его вершин.
- Около любого треугольника можно описать окружность. Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.
- Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке.

- Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.
- На рисунке 248 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что треугольник описан около окружности.
- Центр вписанной окружности треугольника равноудален от всех его сторон.
- В любой треугольник можно вписать окружность. Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения биссектрис треугольника.
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляют по формуле $r=\frac{a+b-c}{2}$, где r — радиус вписанной окружности, a и b — катеты, c — гипотенуза.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

§ 1. Четырехугольники

1. Четырехугольник и его элементы

14. 18 см, 12 см, 6 см, 27 см. **15.** 10 см, 8 см, 16 см, 30 см. **20.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **22.** 10 см. **26.** *Указание.* Постройте треугольник по двум соседним сторонам четырехугольника и известному углу между ними. Третья сторона этого треугольника является диагональю искомого четырехугольника. **29.** *Указание.* Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и BC и углу B между ними. В треугольнике ACD известны сторона AC, прилежащий угол CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) и сумма сторон AD и CD. Построение треугольника по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других его сторон было рассмотрено в курсе геометрии 7 класса. **34.** 32°.

2. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

49. 90°. **53.** 9 см, 14 см. **57.** $AB = BC = CD = AD = 6$ см. **58.** 32 см. **59.** 45°, 135°. **60.** 6 см, 12 см. **64.** 80 см. **65.** 9 см, 24 см. **66.** 20 см, 24 см. **67.** 6 см. **68.** 48°, 132°. **71.** 40 см. **72.** 5 см, 9 см. **74.** 25 см. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** 72°, 108°. **82.** *Указание.* Искомая точка является точкой пересечения высот треугольника ABC. **84.** *Указание.* Докажите, что $\Delta MAD = \Delta DKC = \Delta MBK$. **85.** *Указание.* Постройте параллелограмм, одна вершина которого совпадает с вершиной данного угла, две другие вершины лежат на сторонах угла, а точка пересечения диагоналей параллелограмма совпадает с данной точкой. **86.** 24 см или 14 см.

3. Признаки параллелограмма

108. 32°. **109.** 16 см.

4. Прямоугольник

119. 6 см, 12 см. **120.** 5 см, 10 см. **121.** 15 см, 25 см. **122.** 12 см. **124.** *Указание.* Пусть CM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе AB (рис. 249). На продолжении отрезка CM за точку M отложите отрезок MD, равный CM. Определите вид четырехугольника $ACBD$ и воспользуйтесь свойствами четырехугольников такого вида. **127.** 30°, 60°. *Указание*. Покажите, что в прямоугольном треугольнике ABM гипотенуза AM в 2 раза больше катета BM. **128.** 4,5 см. **131.** 1) *Указание*. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и разности катетов. На рисунке 250 изображен прямоугольный треугольник ACB, в котором известны гипотенуза AB и разность катетов. На катете BC отметьте точку M так, чтобы $CM = AC$. Тогда $BM = BC - AC$. Отсюда $\angle AMB = 135°$. Следовательно, можно построить треугольник AMB по сторонам AB и MB и углу AMB. **132.** 48°. **133.** 90°. **134.** Треугольник ACE равнобедренный.

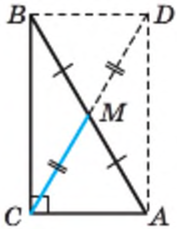


Рис. 249

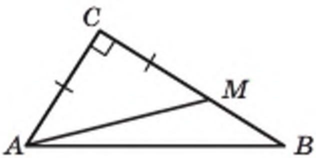


Рис. 250

5. Ромб

157. 6 см. **160.** 1) *Указание*. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по сумме катетов и острому углу. На рисунке 251 изображен прямоугольный треугольник ABC, в котором известны угол A и сумма катетов AC и CB. Тогда $AM = AC + CB$, $\angle CMB = 45°$. Треугольник AMB можно построить по стороне AM и двум прилежащим углам. **161.** *Указание*. Середина отрезка NK — точка O является точкой пересечения диагоналей ромба. Тогда прямая MO параллельна сторонам BC и AD. Длина отрезка MO равна половине стороны ромба. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 см.

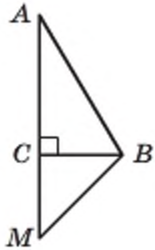


Рис. 251

6. Квадрат

174. 28 см. **177.** 48 см. **180.** *Указание*. Докажите, что $AC \perp MK$. **181.** *Указание*. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой MK. **182.** *Указание*. Постройте два прямоугольных треугольника, в каждом из которых один катет равен стороне квадрата, а гипотенузы являются данными отрезками. Докажите равенство этих треугольников. **184.** *Указание*. Постройте равносторонний треугольник BO_1C так, чтобы точка O_1 принадлежала квадрату. Покажите, что $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. Отсюда следует, что точки O и O_1 совпадают. **185.** *Указание*. На продолжении отрезка CD за точку D отметьте точку M_1 так, чтобы $DM_1 = BM$. Докажите, что $\angle EAM_1 = \angle EM_1A$.

7. Средняя линия треугольника

202. 28 см. **206.** $MK = 4$ см. *Указание*. Проведите среднюю линию треугольника ABC. **207.** 9 см. *Указание*. Рассмотрите треугольник, для которого отрезок MK является средней линией. **210.** *Указание*. Пусть точки M, K и F — середины отрезков AB, AD и AC соответственно. Определите, каким прямым принадлежат высоты треугольника MKF. **211.** *Указание*. Пусть точки E, F и K — середины отрезков AC, BC и BD соответственно. Докажите, что треугольник EFK равнобедренный. **213.** 37°. **214.** 8 см.

8. Трапеция

234. 16 см, 34 см. **236.** 16 см. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 см. **247.** 7,2 см, 10,8 см. **249.** $2h$. **250.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **251.** 12 см, 12 см, 12 см. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 см, 16 см. **254.** 60°, 120°. **255.** Если острый угол трапеции равен 45°. **260.** 7 см. **261.** 13 см, 21 см. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 см. *Указание*. Проведите через вершину C прямую, параллельную прямой BD. Пусть E — точка пересечения проведенной прямой с прямой AD. Рассмотрите треугольник ACE. **267.** *Указание*. Точка пересечения биссектрис — вершина прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является боковая сторона трапеции. Рассмотрите медиану этого треугольника, проведенную к гипотенузе, и докажите, что она параллельна основаниям трапеции. **268.** 1) *Указание*. Через одну из вершин меньшего основания проведите прямую, параллельную боковой стороне трапеции. Задача свелась к построению треугольника по трем сторонам; 2) *Указание*. Через одну из вершин меньшего основания проведите прямую, параллельную диагонали трапеции. Задача свелась к построению треугольника по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне. **271.** $a + b$. *Указание*. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Проведите перпендикуляры AM, OK и CE к прямой, проходящей через точку B, и покажите, что $OK = \frac{a+b}{2}$. **275.** 1) 120°; 2) 120°.

9. Центральные и вписанные углы

297. *Указание*. Проведите хорду BC и воспользуйтесь тем, что угол AMC — внешний угол треугольника BMC. **298.** *Указание*. Проведите хорду BC и воспользуйтесь тем, что угол ABC — внешний угол треугольника BMC. **299.** 10°. **300.** 40°, 40°, 100°. **301.** 120°, 20°, 40°. **306.** 56°, 56°, 68°. **308.** *Указание*. Опустите из вершин A и B высоты треугольника ABC. **309.** *Указание*. Через точку касания окружностей проведите их общую касательную. Воспользовавшись ключевой задачей п. 9, докажите, что рассматриваемые хорды параллельны общей касательной. **310.** *Указание*. $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBA + \angle BAC = \angle BMD$. **311.** Искомое ГМТ — две дуги, изображенные на рисунке 252, за исключением точек A и B. *Указание*. Проведите два луча AC и BC так, что $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Пусть эти лучи пересекаются в точке C. Очевидно, что $\angle ACB = \alpha$. Опишите окружность около треугольника ABC. Выполнив аналогичное построение в другой полуплоскости относительно прямой AB, получите треугольник ABC_1, около которого также опишите окружность. Дуги ACB и AC_1B, за исключением точек A и B, являются искомым ГМТ. **313.** *Указание*. Воспользуйтесь результатами задачи 311.

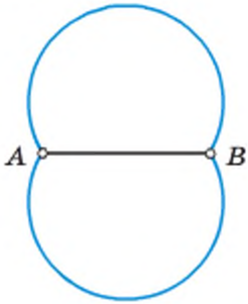


Рис. 252

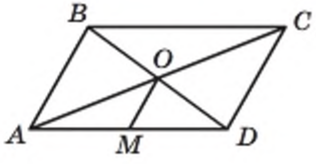


Рис. 253

314. *Указание*. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, точка M — середина стороны AD (рис. 253). Тогда $OM = \frac{1}{2}AB$. Треугольник AOD можно построить (см. задачу 313).

316. *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 1 п. 9. **317.** Искомое ГМТ выделено на рисунке 254 синим цветом. **318.** *Указание*. $\angle DCB = \angle DAB = \angle 1$ (рис. 255). Тогда $\angle OCD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle COD = \angle 1 + \angle ACO$. Однако $\angle ACO = \angle 2$. Следовательно, $\angle OCD = \angle COD$. **319.** *Указание*. Пусть отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Вычислите угол C_1MB_1, воспользовавшись результатами задачи 297. **320.** *Указание*. Постройте окружность с центром в точке O_1 и радиусом, равным разности радиусов данных окружностей. Проведите через точку O_2 касательную к построенной окружности. **321.** 1) *Указание*. Пусть точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, в котором известны угол B и сторона AC. Докажите, что $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. В треугольнике AOC известны сторона AC, угол AOC и высота, проведенная из вершины O (радиус вписанной окружности). Далее см. задачу 312; 2) *Указание*. На рисунке 256 изображен треугольник ABC, в котором известны сторона AC, угол B и медиана, проведенная к стороне BC. Проведите среднюю линию MN треугольника ABC. Тогда $\angle NMC = \angle B$. Постройте ГМТ точек X таких, что $\angle NXC = \angle B$. **322.** 9 см, 10 см, 11 см. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Прямоугольный или равнобедренный.

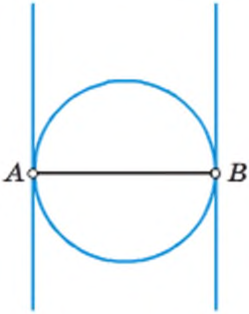


Рис. 254

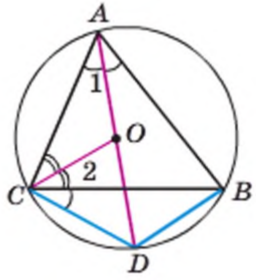


Рис. 255

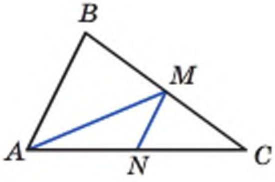


Рис. 256

10. Описанная и вписанная окружности четырехугольника

342. 90°. **343.** 6 см. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348.** 62°, 118°. **350.** 196 см. **351.** 6 см. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Указание*. Докажите, что угол между диагональю и бо́льшим основанием трапеции равен 60°. Далее воспользуйтесь ключевой задачей п. 8. **354.** 6 см.

Указание. Докажите, что центр окружности, описанной около трапеции, является серединой большего основания. **355.** *Указание*. Опишите окружность около четырехугольника $CMKB$. **357.** 30°. *Указание*. Докажите, что около четырехугольника $AMOK$ можно описать окружность, и воспользуйтесь тем, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. **358.** 60°. *Указание*. Обозначив $\angle N = \alpha$, выразите через α угол AOB. **359.** *Указание*. Докажите, что около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность. **360.** *Указание*. Докажите, что угол CPB не изменяет свою величину. **361.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что в прямоугольных треугольниках APK и AMQ острые углы APQ и AMQ равны. **362.** *Указание*. Точки A, C, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC. Воспользуйтесь тем, что серединный перпендикуляр хорды проходит через центр окружности. **363.** *Указание*. Докажите, что средняя линия данной трапеции равна сумме радиусов построенных окружностей. **366.** 128°.

§ 2. Подобие треугольников

11. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

386. 30 см. **388.** 12 см. **389.** 4 см. **390.** 6 см, 45°. **392.** 20 см, 24 см. **393.** 5 см, 10 см. **395.** 8 см, 12 см. **397.** 6 см, 5 см, 6 см. **398.** 15 см, 12 см, 21 см. **399.** 15 см. **402.** 45 см. **404.** 21 см, 15 см. **405.** 45 см, 18 см. **406.** 30 см, 50 см. **407.** 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 см. **410.** 50 см. **411.** 3 : 5. *Указание*. Проведите через точку K прямую, параллельную прямой AM. **412.** 1) 3 : 7. *Указание*. Проведите через точку M прямую, параллельную прямой BK; 2) 2 : 3. *Указание*. Проведите через точку K прямую, параллельную прямой CM. **413.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что средняя линия трапеции делит диагональ пополам. **415.** 2) *Указание*. Пусть дан угол ABC. Проведите прямую OK, параллельную лучу BC (точка K принадлежит стороне AB). На луче KA отметьте точку M такую, что $MK : KB = 2 : 3$. **416.** 3) *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник BDK, в котором катет BD равен данной высоте, а гипотенуза BK — данной медиане. По данному углу и углу BKD найдите угол между двумя медианами треугольника; 4) *Указание*. Пусть ABC — искомый треугольник, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 которого пересекаются в точке M. На луче MB_1 отметьте точку F так, чтобы $MB_1 = B_1F$. Треугольник MCF можно построить по трем сторонам. **417.** 2) *Указание*. Пусть ABC — искомый треугольник, медианы AA_1 и CC_1 которого пересекаются в точке M. Треугольник AMC можно построить по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне. **419.** *Указание*. Проведите через точку C прямую, параллельную прямой BD. Пусть проведенная прямая пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $BC = BE$, и воспользуйтесь теоремой о пропорциональных отрезках. **420.** a. **421.** 11 см.

12. Подобные треугольники

432. 33 м. **439.** 6 см. **440.** 9 см. **441.** 40 см, 60 см. **442.** 36 см. **443.** 8 см. **444.** 4,8 см. *Указание*. Через вершину A проведите прямую, параллельную прямой BD. **445.** 6 см, 12 см. **446.** 36 см. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°.

13. Первый признак подобия треугольников

463. 6 см, 30 см. **464.** 10,5 см, 13,5 см. **467.** 42 см. **468.** 10 см, 14 см. **469.** 12,5 см, 3,5 см. **471.** 12 м. **475.** 24 см. **476.** 16 см. **477.** 16 см. **478.** 5 см. *Указание*. Проведите через точку P диаметр окружности и воспользуйтесь ключевой задачей 2 п. 13. **479.** 10 см. **480.** 27 см. **481.** 2) 36 см. **482.** 10 см. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 см, 15 см. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 см.

14. Второй и третий признаки подобия треугольников

496. 18 см, 30 см. **497.** 50 см, 20 см. **498.** 6 см. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Указание*. Докажите, что $\Delta KBM \backsim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{b}{a+b}$. **501.** 6 см. *Указание*. Докажите, что $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$. **502.** *Указание*. Докажите, что $\Delta AHC \backsim \Delta ABD$ по второму признаку подобия треугольников. Отсюда $\angle ACH = \angle ABD$. **503.** *Указание*. Докажите, что из подобия треугольников BMC и CMK следует подобие треугольников ABM и KAM. **505.** *Указание*. Пусть окружности пересекаются в точках E и F. Для двух пар хорд AB и EF, CD и EF примените ключевую задачу 2 п. 13. **506.** 9 см, 14 см. **508.** 10 см.

§ 3. Решение прямоугольных треугольников

15. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

514. 15 см, 20 см. **515.** 30 см, 24 см. **516.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **517.** 14,5 см. **518.** 62 см. **519.** 12,5 см. **520.** 12,8 см. **521.** 2,5. **522.** 196 см. *Указание*. Докажите, что концы боковой стороны трапеции и центр вписанной окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. **523.** 18 см. **525.** 7 см, 14 см. **526.** 14 см. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°.

16. Теорема Пифагора

542. 13 см. **543.** 10 см. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *а*) $\sqrt{6}$ см; *б*) $\sqrt{3}$ см; *в*) $4\sqrt{2}$ см. **549.** *а*) $\sqrt{2}$ см; *б*) 1 см. **550.** $4\sqrt{5}$ см. **551.** $4\sqrt{10}$ см. **552.** $4\sqrt{13}$ см. **553.** $4\sqrt{5}$ см. **554.** 10 см, 10 см, 12 см. **555.** 40 см, 25 см, 25 см. **556.** 20 см. **557.** 20 см. **558.** 24 см. **559.** 1,5 см, 22,5 см. **560.** 8 см, 6 см, 10 см. **561.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **562.** 168 см. **563.** 200 см. **564.** 20 локтей. **565.** $8\sqrt{10}$ см. *Указание*. Докажите, что боковая сторона трапеции равна ее большему основанию. **566.** $12\sqrt{3}$ см. **567.** $2\sqrt{65}$ см. **568.** $12\sqrt{5}$ см. **569.** 128 см. *Указание*. Воспользуйтесь свойством биссектрисы угла треугольника и найдите отношение боковой стороны к половине основания. **570.** 162 см. **571.** 54 см. **572.** $8\sqrt{10}$ см. **573.** 10 см, $4\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **574.** 26 см. **575.** $3\frac{3}{4}$ фута.

17. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

595. 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$. **600.** $\frac{1}{6}$. *Указание*. Из подобия треугольников AMC и BDC следует, что $\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BD}=\frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\frac{KC}{AC}=\frac{BD}{AB}$. **602.** *Указание*. Из точки F опустите перпендикуляр на отрезок ED. Найдите тангенсы углов E и B. **603.** 3 см. **604.** 12 см. **605.** 14 см.

18. Решение прямоугольных треугольников

618. 45°. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** a, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 см. **626.** 16 см. **627.** 15 см. **628.** $4\sqrt{2}$ см. **629.** $\dfrac{h}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$. **630.** $\dfrac{h}{\sin\alpha}$, $\dfrac{h}{\cos\alpha}$, $\dfrac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

631. $a \operatorname{tg} \varphi$, $\dfrac{a}{\cos\varphi}$, $a \sin \varphi$. **632.** $\dfrac{d}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, $d\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **633.** $\dfrac{2r}{\sin\alpha}$, $\dfrac{2r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $\dfrac{2r}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **634.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$. **636.** $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{93}$ см, $\sqrt{181}$ см.

638. $\angle A = 86°$, $\angle B = 111°$, $\angle C = 94°$, $\angle D = 69°$. **639.** 18 см, 21 см.

§ 4. Многоугольники. Площадь многоугольника

19. Многоугольники

654. 3) $\dfrac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 сторон, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°. **659.** Пятиугольник. **660.** *Указание*. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, каждый угол которого равен 120°. Если провести секущую MN (рис. 257), то сумма углов пятиугольника $ABMNF$ будет равна 540°. Тогда сумма углов BMN и FNM равна 180°. **662.** 80 см. **663.** $\left(26+10\sqrt{13}\right)$ см. **664.** $3\sqrt{5}$ см.

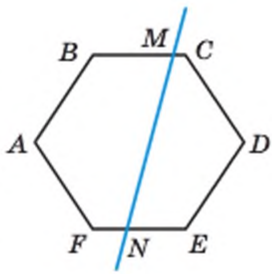


Рис. 257

20. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

674. 0,000126 Н. **675.** 12 000 Н. **676.** $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ см². **686.** В 2 раза. **687.** Ни одного, или два, или три. **688.** Ни одного или два. **689.** 504 см². **690.** 30 см. **691.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого равны сторонам данных квадратов. **692.** *Указание*. Сторона искомого квадрата $x=\sqrt{ab}$. **694.** 24 см. **695.** 2 см.

21. Площадь параллелограмма

704. 1) Два решения: 4 см и 9 см; 2) одно решение: 8 см. **705.** 300 см². **706.** 120 см². **707.** $108\sqrt{3}$ см². **708.** $ab \sin \alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ см². **710.** $140\sqrt{2}$ см². **711.** 37,5 см². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 см². **715.** 360 см². **719.** 1 : 7.

22. Площадь треугольника

732. $\frac{200}{3}$ см². **733.** $11\sqrt{3}$ см². **734.** 170 см². **735.** $b^2 \sin \alpha \cos \alpha$. **736.** $h^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$. **739.** $\frac{120}{13}$ см. **740.** 96 см². **741.** 108 см². **742.** 768 см². **744.** 52 см. **745.** 336 см². **746.** 1080 см². **757.** *Указание*. Учтите, что треугольники ABX и AXM имеют общую высоту. Это же свойство имеют и треугольники CBX и CXM. **758.** 120 см². **759.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **760.** 1176 см². **761.** 9,6 см². **762.** $\frac{4000}{3}$ см². *Указание*. Воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, найдите отношение боковой стороны и половины основания треугольника. **763.** $\frac{4000}{3}$ см². **764.** 19 см². *Указание*. Воспользуйтесь результатами задач 750 и 757. **765.** *Указание*. Проведите прямые AM, BM и CM и воспользуйтесь результатами задачи 757. **766.** *Указание*. Проведите медиану AM. Пусть N — точка на стороне BC такая, что $AN \parallel DM$. Докажите, что прямая DN — искомая. **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ см. **770.** 80 см.

23. Площадь трапеции

782. $108\sqrt{3}$ см². **783.** 195 см². **784.** 840 см². **785.** 132 см². **786.** $600\sqrt{3}$ см². **787.** 1640 см². **788.** $(32+32\sqrt{2})$ см². **789.** 294 см². **793.** 512 см². **794.** 192 см². **795.** 336 см². *Указание*. В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину C проведите прямую CF, параллельную диагонали BD (точка F принадлежит AD), и рассмотрите треугольник ACF. **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Указание*. Докажите, что угол при большем основании трапеции равен 60°. **797.** 156 см². *Указание*. Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Докажите, что треугольник AOB прямоугольный, и найдите его высоту, проведенную из вершины O. **798.** 588 см². **799.** 2187 см². *Указание*. Докажите, что диагональ данной трапеции является биссектрисой угла при основании. Далее воспользуйтесь свойством биссектрисы треугольника. **800.** 936 см². **801.** $\frac{S}{2}$. *Указание*. Проведите среднюю линию MN трапеции. Докажите, что высоты треугольников MCN и MND, проведенные из вершин C и D, равны половине высоты трапеции. **802.** 15 см, 10 см. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 см.

Упражнения для повторения курса геометрии 8 класса

806. 64 см или 74 см. **807.** 10 см, 18 см. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) да. *Указание*. Докажите, что точкой пересечения диагонали делятся пополам. **812.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°. **816.** 18 см. **818.** 56 см. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **823.** CD. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 см, 10 см. **830.** 1 : 2. **831.** 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 см, 3 см, 6 см. **834.** 21 см, 35 см. **835.** 28 см, 28 см, 16 см. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 см, 15 см. **840.** 25 см. **841.** 5 см. **842.** 10 см. **843.** 36 см. **844.** $(12\sqrt{5}+20)$ см. **845.** 18 см. **846.** 24 см. **847.** $4\sqrt{29}$ см, $10\sqrt{29}$ см. **848.** $\frac{65}{18}$ см. **849.** $2\sqrt{10}$ см. **850.** 45 см. **851.** *а*) $\frac{S}{2}$; *б*) $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 см². **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\,\mathrm{tg}\,\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ см². **858.** 24 300 см². **859.** 6 см.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

Номер задания	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Б	Г	А	А	В	В	Г	А	В	В
2	Б	В	В	В	Б	В	Г	Б	Г	А
3	В	Б	В	Б	Г	В	Б	В	Г	Б
4	Б	В	А	Г	А	Г	Г	Б	Г	В

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням російською мовою

(*Російською мовою*)

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Лісневська*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 14,00. Обл.-вид. арк. 12,70.
Тираж 32 419 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003